UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci45fran

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(PREMIÈRE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. Émile PICARD, *Président.*

P. APPELL.

E. BOREL.

J. HADAMARD.

E. GOURSAT.

M. BRILLOUIN.

D. TOMBECK, *Secrétaire.*

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, quai Conti, n° 25, Paris, VIe.

64182-21 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, V. VOLTERRA, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XLV. — ANNÉE 1921.
(LVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179889
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1921

5

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

OEuvres complètes de Thomas JAN STIELTJES. *publiées par les soins de la Société mathématique d'Amsterdam.* T. II. 1 vol. in-4, 603 pages. Groningen. P. Noordhoff, 1918.

Le Tome I des *Œuvres de Stieltjes* a paru en 1914, et une analyse en a été faite dans ce Recueil par Darboux (1). Le Tome II fut publié en 1918, édité avec le même soin que le premier volume par la Société mathématique d'Amsterdam. On se rappelle que Thomas Stieltjes, originaire de Hollande, vint en France en 1885 et publia dans des recueils français la plus grande partie de ses OEuvres mathématiques. Après sa naturalisation, il fut nommé professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, et mourut dans cette ville en 1894.

Bien avant la publication des OEuvres, la correspondance d'Hermite et de Stieltjes avait été éditée, grâce au zèle de MM. Baillaud et Bourget (2). Cette correspondance commencée en 1882 avait duré jusqu'à la mort de Stieltjes; elle porte hautement témoignage du talent mathématique et de l'activité du professeur de l'Université de Toulouse. On peut dire que tous les Mémoires de Stieltjes, avant de paraître, avaient fait l'objet de

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XXXIX, 1re partie, août 1915, p. 169-171.

(2) *Correspondance de Hermite et de Stieltjes* (Paris, Gauthier-Villars, 1905, en deux volumes).

quelque lettre échangée avec l'illustre doyen des mathématiques françaises à cette époque, et il est extrêmement intéressant de retrouver dans la correspondance le premier jet, en quelque sorte, des découvertes mathématiques de Stieltjes. Comme je le disais en 1905, en présentant cette correspondance, il semble que dans ces lettres le langage abstrait de l'analyse perde de sa sécheresse et que la mathématique y devienne plus humaine. Tout lecteur des deux beaux volumes des Œuvres devra avoir sous la main la Correspondance de Stieltjes et d'Hermite, monument peut-être unique par son originalité dans l'histoire des sciences.

Le présent Volume renferme, entre d'autres travaux, le grand Mémoire de Stieltjes sur les fractions continues, qui est son œuvre la plus importante. Ce fut le chant du cygne; Stieltjes succombait peu de temps après l'avoir écrite, emporté par un mal implacable. Bien curieuse est une lettre écrite d'Algérie, où Stieltjes était allé chercher quelque adoucissement à sa maladie. Il y fait connaître à Hermite un théorème sur les suites de fonctions analytiques, qui jouait dans son étude un rôle essentiel. Il est sûr de son résultat, mais cependant il a quelque crainte. « J'ai dû l'examiner avec d'autant plus de soin, écrit-il [1], qu'*a priori* il me semblait que le théorème énoncé ne pouvait exister et devait être faux. » On sait que, depuis lors, de nombreuses généralisations du théorème de Stieltjes ont été données, et dans des voies diverses, par MM. Porter et Vitali, puis par M. Landau, et enfin par M. Montel dans ses beaux travaux sur les suites normales de fonctions analytiques.

Les papiers laissés par Stieltjes contenaient trois Mémoires dont l'intérêt a semblé suffisant pour justifier leur insertion dans ce Tome. Diverses notes terminent le volume; plusieurs d'entre elles ont été trouvées, écrites de sa propre main, en marge de certains de ses Mémoires imprimés.

Tous les géomètres seront reconnaissants à la Société mathématique d'Amsterdam des soins qu'elle a apportés dans la publication des œuvres d'un mathématicien, dont le talent si original fait honneur à la Hollande et à la France.

ÉMILE PICARD.

---

(1) *Correspondance*, t. II, p. 369.

OCAGNE (M. D'). — PRINCIPES USUELS DE NOMOGRAPHIE, *avec application à divers problèmes concernant l'Artillerie et l'Aviation.* Conférences faites à la Section technique de l'Artillerie (février 1919); 1 vol. in-8°, 67 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920.

M. d'Ocagne, inspecteur général des Ponts et Chaussées, professeur de Géométrie pure et appliquée à l'École Polytechnique, est unanimement reconnu aujourd'hui, au moins en France, comme le spécialiste le plus qualifié de l'application de la Géométrie à la science du calcul tel qu'il intervient dans les diverses branches de la technique.

Il a institué à cet effet un nouveau corps de doctrine, par lui baptisé *Nomographie*, qui embrasse dans leur ensemble tous les modes possibles de représentation plane applicables à des équations à un nombre quelconque de variables, corps de doctrine que le juge le plus compétent en la matière, à notre époque, Maurice Levy, n'a pas hésité à placer au même rang que la Géométrie descriptive et la Statique graphique (1).

Cette synthèse générale « attrayante, a dit Tannery (2), par la variété des problèmes résolus, parfois amusante par l'ingéniosité des solutions, où la science du géomètre trouve à s'employer d'une façon inattendue », a eu pour couronnement une classification rationnelle de tous ces modes possibles de représentation, englobant *a priori* non seulement ceux qui ont déjà été mis en usage, mais même tous ceux qui pourront jamais l'être en vue de telle ou telle espèce d'équations.

Parmi tous ces modes possibles, il en est un d'une importance capitale, devenu de nos jours d'un emploi tout à fait courant : c'est celui dont M. d'Ocagne avait fait connaître le principe dès l'année 1884, par l'étude duquel il a préludé aux travaux de grande ampleur d'où est sortie la Nomographie, et qui est aujourd'hui bien connu sous le nom de *méthode des points alignés.*

En imaginant cette méthode, M. d'Ocagne a, le premier, fait concourir le principe de dualité, si fécond dans le domaine des mathématiques pures, à des fins strictement pratiques. Il a d'ailleurs eu recours, pour l'application de ce principe, à un sys-

---

(1) *Génie civil*, 1899, p. 425, et *Revue générale des Sciences*, 1907, p. 74.
(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1899, p. 172.

tème spécial de coordonnées tangentielles, dites par lui *coordonnées parallèles*, qui, lorsqu'on ne se borne pas, comme le font les purs mathématiciens, à en user comme d'un moyen de démonstration, mais qu'on s'en sert en vue d'établir certaines constructions graphiques, offrent d'incontestables avantages.

En transportant la représentation graphique des équations, du domaine ponctuel dans le domaine tangentiel, — ce qui, *a priori*, n'apparaissait nullement comme naturel, — M. d'Ocagne a obtenu un résultat tout à fait capital, savoir : rendre possible la représentation d'équations à plus de trois variables (c'est-à-dire la construction de tables à plus de deux entrées), alors que cette représentation était mathématiquement impossible dans le domaine ponctuel, à moins que l'équation à plus de trois variables considérée ne fût susceptible, moyennant l'introduction de certaines variables auxiliaires, d'être remplacée par une suite d'équations ne contenant pas chacune plus de trois variables.

Les équations à quatre variables, auxquelles s'applique la méthode de M. d'Ocagne, sont d'un type extrêmement fréquent dans la pratique; la première qu'il ait représentée de la sorte est l'équation complète du troisième degré.

La Nomographie, introduite par M. d'Ocagne dans ses cours de l'École Polytechnique et de l'École des Ponts et Chaussées, est aujourd'hui enseignée dans la plupart des Instituts techniques de la France et de l'étranger, comme l'attestent d'assez nombreux résumés rédigés en diverses langues, l'un entre autres publié en allemand avant 1914 par le Dr Schilling, à l'invitation expresse du professeur F. Klein (1). Le fait, pour une doctrine née en France, de sa diffusion en Allemagne, est une preuve évidente de sa valeur et de son utilité.

M. d'Ocagne avait, avant la guerre, fait connaître lui-même un très grand nombre d'applications de ses méthodes à diverses techniques. Invité, pendant la guerre, par M. Painlevé, alors chargé, comme Ministre, des inventions intéressant la défense nationale, à poursuivre l'étude de toutes les applications possibles de la Nomographie aux diverses techniques de guerre, M. d'Ocagne, qui

---

(1) *Ueber die Nömographie von M. d'Ocagne*, par le Dr Friedrich Schilling, professeur à l'Université de Göttingen (Leipzig, Teubner, 1900).

avait d'abord servi au front comme lieutenant-colonel du Génie, s'est trouvé conduit à organiser une section spéciale de Nomographie, rattachée d'abord à la Direction des Inventions, puis à la Section technique de l'Artillerie, où il a formé un groupe d'officiers placé sous ses ordres à la pratique de ses études; c'est l'exposé des principes, réduit à l'essentiel, qu'il a conçu à leur intention et qu'il a, naturellement, illustré par plusieurs des applications spéciales étudiées à cette occasion, qui a fourni la matière de la nouvelle brochure que nous analysons ici. Parmi ces applications spéciales, il convient de mentionner à part celles qui concernent le calcul des éléments initiaux du tir de l'Artillerie, corrigés, d'un seul coup, de toutes les influences qui en modifient la valeur. Ces nomogrammes du tir, construits pour les pièces de tous calibres et pour toutes les charges, ont fait l'objet d'un rapport officiel du Général commandant l'Artillerie de la 5e armée au Général en chef, à la date du 21 février 1917. Ce rapport constate que l'emploi de ces nomogrammes a réduit le temps de la préparation du tir d'un quart d'heure environ à moins de cinq minutes, et supprimé toute espèce de chance d'erreur dans cette détermination. Il est d'ailleurs important de noter que ces tables *à triple entrée* n'ont pu être construites que grâce à l'application du principe des points alignés qui a, par conséquent, permis d'atteindre là un résultat pratique du plus haut intérêt, absolument inaccessible à la vieille méthode de représentation cartésienne dont tous les procédés antérieurs à ceux de M. d'Ocagne n'étaient que des variantes.

Un lecteur voulant s'initier à la Nomographie, prise dans toute sa généralité, devra se reporter aux Ouvrages détaillés de M. d'Ocagne : *Traité de Nomographie*, *Calcul graphique et Nomographie*. Mais à celui qui veut uniquement s'assimiler les parties de la doctrine d'une pratique tout à fait courante, la nouvelle brochure donnera toute satisfaction.

P. Appell.

GLOBA-MIKHAÏLENKO (B.). — Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le titre de Docteur ès sciences mathématiques* (Thèse de doctorat d'État), soutenue le 7 juin 1920 sous la présidence de M. Boussinesq. 1 vol. in-4°, v-69 pages, 7 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920.

M. Globa-Mikhaïlenko, qui a soutenu autrefois une thèse de Doctorat d'Université : *Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Journal de Mathématiques*, 7e série, vol. II) (1), a présenté récemment en 1920 une thèse pour le doctorat d'État, également insérée au *Journal de Mathématiques*. Son Mémoire comprend trois Parties distinctes.

La première Partie a pour objet l'étude des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, soumise aux seules forces capillaires et assujettie soit à la condition de rester cylindrique, soit à celle d'être limitée par deux disques parallèles, d'égal rayon, ayant comme axe commun l'axe de rotation du liquide, la distance entre les disques restant fixe. Les conditions de stabilité de ces figures y sont déterminées, ainsi que les figures infiniment voisines, donnant naissance à de nouvelles séries de figures, s'amorçant pour une valeur bien déterminée de la vitesse angulaire. Les figures cylindriques d'équilibre, correspondant à cette valeur de la vitesse angulaire, sont des figures de bifurcation au sens de Poincaré. Les résultats obtenus prouvent que la théorie générale des figures de bifurcation, avec le principe d'échange des stabilités, est applicable non seulement au cas des forces newtoniennes ou, en général, au cas où il existe une fonction de forces, mais aussi au cas tout à fait différent où la masse liquide est soumise à une pression superficielle proportionnelle à la courbure moyenne et ne dépendant d'aucune fonction des forces. Les figures étudiées ici présentent encore une particularité, à savoir, qu'elles peuvent présenter un cas de figures de bifurcation où plus de deux séries de différentes figures d'équilibre se rencontrent. Ce cas a été prévu par Poincaré, mais il n'avait pas encore été rencontré. La méthode générale a été appliquée. L'énergie potentielle de la masse liquide a été calculée; les conditions de maximum de cette énergie ont été déterminées pour

(1) *Voir* l'analyse de cette Thèse, par M. Paul Appell, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XL, 1916, 1re partie, p. 236-238.

établir les conditions d'équilibre stable. Les figures de bifurcation se présentent quand la deuxième variation de l'énergie s'annule.

A la fin de cette Partie, le problème direct suivant a été résolu : *Trouver toutes les figures d'équilibre, cylindriques et non de révolution, que peut affecter une masse liquide indéfinie, soumise aux seules forces capillaires et tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante.* L'équation différentielle du périmètre de la section droite a pu être intégrée, et l'équation finie de ce périmètre a été établie. Cette équation contenant une intégrale hyperelliptique, tous les calculs effectifs sont presque impossibles. Ce dernier cas présente moins d'intérêt pratique, car les figures sont instables.

La deuxième Partie étudie des figures d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation, soumise aux seules forces newtoniennes et limitée par deux surfaces distinctes, ne se coupant pas, c'est-à-dire les figures ayant un creux au milieu. En se bornant au cas des figures limitées par des surfaces du second ordre, l'auteur établit que seule la couche cylindrique de révolution peut être une figure d'équilibre. A chaque valeur de la vitesse angulaire correspond une valeur bien déterminée du rapport des rayons des deux cylindres limitant le fluide. Pour une série discontinue de valeurs de la vitesse angulaire, la figure cylindrique devient une figure de bifurcation et peut donner naissance à de nouvelles séries de figures d'équilibre. Toutes ces figures sont instables, si l'on n'assujettit pas la masse fluide à la condition de rester cylindrique. La méthode employée est analogue à celle de Poincaré.

Enfin, la troisième Partie n'est qu'une remarque sur les oscillations simples synchrones des molécules d'une masse fluide en rotation, soumise aux seules forces newtoniennes et affectant comme figure stable la forme d'un ellipsoïde. L'auteur attire l'attention sur un passage singulièrement obscur du célèbre Mémoire de Poincaré du Tome VII des *Acta mathematica*. Il critique les conclusions de Poincaré et formule des objections graves contre sa méthode de calcul. J'ai indiqué, dans les *Comptes rendus* du 26 octobre 1920, une autre voie permettant d'étudier des mouvements oscillatoires et d'arriver à une comparaison avec les résultats de Poincaré. Ce point demande évidemment de nouvelles études.

P. Appell.

BERZOLARI (L.). — GEOMETRIA ANALITICA. Tome I : *Il metodo delle coordinate*. Seconda Edizione riveduta e accresciuta di un' appendice sugli elementi del calcolo vettoriale, con 61 incisioni. (Manuali Hoepli, serie scientifica 388-389 *bis* e *ter*.) [Géométrie analytique. Tome I : La méthode des coordonnées. Seconde édition revue et augmentée d'un appendice sur les éléments du calcul vectoriel, avec 61 figures. (Manuels Hoepli, série scientifique 388-389 *bis* et *ter*.)] 1 vol in-8, XIII-495 pages. Milan, Hoepli, 1920.

La plus grande partie de l'excellent Traité de M. Berzolari, qui reproduit des leçons de Géométrie analytique professées à l'Université de Pavie, est consacrée, comme il était naturel, aux coordonnées cartésiennes et à leurs applications. Mais dès le début se manifeste le souci de préparer l'étude, qui occupe le dernier tiers du Livre, des coordonnées projectives et des projectivités. L'Ouvrage est avant tout, comme l'indique le sous-titre, une étude générale des méthodes : la partie applications, suffisamment développée pour que cette étude soit profitable, a moins d'extension, en général, que dans nos cours correspondants. Écrit suivant un plan très systématique, avec le soin constant de bien marquer l'enchaînement des concepts, d'aplanir à l'étudiant toutes les difficultés, ce Livre rendra d'appréciables services.

On peut y distinguer trois sections. Dans la première (Chap. I-III), l'auteur donne quelques notions préliminaires : énumération des formes géométriques fondamentales, éléments impropres, loi de dualité, projections orthogonales et, en application, la méthode de Möbius pour obtenir la formule fondamentale de trigonométrie sphérique. Il étudie enfin les coordonnées dans les formes fondamentales de première espèce.

Nous passerons rapidement sur la deuxième section (Chap. IV-XII) consacrée à la Géométrie cartésienne : étude très complète de la droite et du plan, notion sur des courbes et surfaces simples, sur les lieux géométriques. Il faut signaler que les applications, même les plus simples, du calcul infinitésimal, ne sont pas développées ici; nous avons l'habitude d'une liaison plus intime entre les deux enseignements. Il n'est naturellement pas question de la théorie des enveloppes et un lien manque entre les équations ponctuelles et tangentielles, que l'auteur a définies parallèlement.

Dans la troisième section du Livre, l'auteur envisage d'abord les projectivités entre formes de première espèce; c'est ici, à propos

des éléments doubles de deux formes projectives superposées, qu'il introduit les éléments imaginaires. Ensuite, après avoir étudié les coordonnées homogènes, il passe, par une transformation linéaire, aux plus générales coordonnées projectives. Enfin, des fondements de la théorie des transformations homographiques, il est amené à l'étude des courbes et surfaces du second degré, développée dans le Tome II de l'Ouvrage.

Un appendice est consacré à la méthode vectorielle : définition des produits, étude de leurs propriétés, application à un certain nombre de questions de Géométrie analytique. L'auteur prend pour définition du vecteur AB celle récemment proposée par Burali-Forti : c'est l'opérateur qui, appliqué à une terne arbitraire de points P, Q, R, produit le nombre

$$\text{vol}(BPQR) - \text{vol}(APQR),$$

les volumes des tétraèdres étant pris algébriquement. On pourra trouver que c'est compliquer à plaisir des notions simples; vaut-il mieux les reprendre toujours sous la même forme?

JOSEPH PÉRÈS.

HATTON (J.-L.-S.). — THE THEORY OF THE IMAGINARY IN GEOMETRY together with *the Trigonometry of the Imaginary* (La théorie de l'Imaginaire en Géométrie avec la Trigonométrie de l'Imaginaire). 1 vol. in-8, VIII-216 pages. Cambridge, University Press, 1920.

Soit un problème portant sur des éléments géométriques réels et supposons trouvée une solution. Il peut arriver, dans certains cas, que cette solution devienne imaginaire et que cependant le résultat continue à être réel. Il peut même arriver que certaines données deviennent imaginaires sans que le problème cesse d'avoir un sens réel. Dans l'un ou l'autre de ces cas, comment faudra-t-il modifier la solution ?

On voit ainsi que la géométrie de l'imaginaire n'est pas un simple jeu de l'esprit, mais peut s'appliquer à des problèmes parfaitement réels.

Pour résoudre les questions posées plus haut, M. Hatton part du principe suivant : Tout élément imaginaire doit être représenté réellement. Par exemple, un point imaginaire sera défini comme

point double d'une involution réelle sur une droite réelle, cette involution n'ayant d'ailleurs pas de point double réel. De cette façon, pour se donner un point imaginaire (ou plutôt deux points imaginaires conjugués), on se donne une involution réelle.

M. Hatton a eu des prédécesseurs, parmi lesquels Poncelet, von Staudt, Esson, qu'il cite, et Marie, qu'il ne cite pas. Son Ouvrage n'est donc pas complètement original, mais il est intéressant parce qu'il traite le sujet d'une façon systématique. Il se limite à la théorie des points, droites et coniques dans le plan, et à un petit chapitre final sur la géométrie de l'espace. Il contient un grand nombre d'exercices résolus ou proposés. Pas assez, à notre avis, se rapportant à des problèmes réels pour lesquels, en définitive, la théorie est faite.

E. Cahen.

MÉLANGES.

SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE CONSIDÉRÉE PAR M. G. HUMBERT;

Par M. le Lieutenant L. GODEAUX.

M. G. Humbert [1] et, après lui, M. L. Remy [2] ont étudié, en utilisant la théorie des fonctions thêta, la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre 3, de manière qu'un point de la surface corresponde à deux couples de points formant un groupe canonique. Ces géomètres ont considéré, comme « modèles projectifs » de la surface, des surfaces du sixième ordre possédant un point triple et un certain nombre de points doubles. Un autre modèle projectif de la surface a également été rencontré incidemment par M. Severi [3] : c'est un plan triple possédant une courbe de diramation d'ordre 12.

[1] *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abeliennes de genre trois* (*Journal de Liouville*, 5e série, t. II, 1896; p. 261-293).

[2] *Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Liouville*, 6e série, t. IV, 1908). *Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Annales Ec. N. sup.*, 3e série, t. XXVI, Paris, 1909).

[3] *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (*Atti R. Accad. Torino*, t. XXXVIII, 1902-1903, p. 185-200).

Nous nous proposons, dans cette Note, de construire, comme modèle projectif de la surface envisagée, une surface d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, située dans un espace linéaire à 6 dimensions, et possédant 28 points doubles coniques. Ces points doubles se distribuent, par groupes de 12, dans des hyperplans touchant la surface suivant des courbes elliptiques d'ordre 6. Nous utiliserons, à cet effet, les méthodes algébrico-géométriques, et nous nous appuierons sur les résultats obtenus par M. Severi, au moyen des mêmes méthodes, dans son travail cité.

1. Soit A une courbe de genre 3, à modules généraux, que nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, être une courbe plane du quatrième ordre, sans point double. Soit F la surface algébrique qui représente les couples de points non ordonnés, de la courbe A, un point de F étant l'image d'un seul couple de points de A. La surface F a les genres géométrique $p_g = 3$, arithmétique $p_a = 0$, linéaire $p^{(1)} = 7$ [1].

Soient P_1, P_2 les points de A qui ont pour image un point P de F; P_3, P_4 les points de A qui, avec P_1, P_2, forment un groupe canonique de cette courbe (c'est-à-dire, actuellement, qui sont situés sur la droite P_1P_2); P′ le point de F image du couple P_3, P_4. Le point P′ est déterminé d'une manière univoque par le point P, et réciproquement. Les couples P, P′ forment donc, sur la surface F, une involution I_2 d'ordre 2, ou encore ils déterminent une transformation birationnelle T de F en elle-même.

Pour qu'un point P coïncide avec son correspondant P′, il faut que P_1 coïncide avec P_3 par exemple, et P_2 avec P_4. Il y aura donc autant de points de coïncidence pour I_2 que de groupes canoniques de A formés de deux points doubles, c'est-à-dire que de bitangentes de la courbe A. On sait que celles-ci sont au nombre de 28, donc :

L'involution I_2 *possède* 28 *points de coïncidence.*

---

[1] Severi, *loc. cit.* Contemporainement, par voie analytique, ces valeurs des invariants avaient été déterminées par M. de Franchis, *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (*Rend. Circ. matem.*, Palermo, t. XVII, 1903). Au sujet des surfaces représentant les couples de points d'une ou de deux courbes algébriques, *voir* aussi Severi, *Sulle corrispondence fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (*Mem. R. Accad. Torino*, 2e série, t. LIV, 1903).

La surface Φ, image de l'involution I_2, n'est autre que la surface dont MM. Humbert, Severi et Remy ont considéré des modèles projectifs.

2. Aux quatre points d'un groupe canonique de A correspondent six points de F. Lorsque le groupe varie dans une série linéaire g_4^1, ces six points décrivent une courbe C de genre 7 et de degré 6, qui est une courbe canonique de F (Severi, *loc. cit.*). Aux ∞^2 séries g_4^1 canoniques de A correspondent ∞^2 courbes C formant un réseau $|C|$ ($p_g = 3$).

Par construction, le système $|C|$ est composé avec l'involution I_2. Soient Γ les courbes qui correspondent aux courbes C sur Φ. Puisque l'involution I_2 ne possède qu'un nombre fini de points de coïncidence, les courbes Γ sont des courbes canoniques de Φ et le réseau $|\Gamma|$, de degré 3 et de genre 4, est donc le système canonique de cette surface. Celle-ci a par conséquent le genre géométrique $\pi_g = 3$ et le genre linéaire $\pi^{(1)} = 4$.

Le genre arithmétique π_a de Φ est lié au genre arithmétique $p_a = 3$ de F par la formule

$$p_a = 2\pi_a + 1 - \frac{\sigma}{4},$$

dans laquelle $\sigma = 28$ [1]. On a donc $\pi_a = 3$.

La surface Φ *a les genres* $\pi_g = \pi_a = 3$, $\pi^{(1)} = 4$.

Si nous rapportons projectivement les courbes Γ aux droites d'un plan, la surface Φ se transforme en un plan triple ayant une courbe de diramation d'ordre 12, considéré par M. Severi.

3. Ges points étant rappelés, nous allons construire une surface d'ordre 12, de S_6, modèle projectif de Φ.

Soient respectivement $|2C|$, $|2\Gamma|$ les systèmes bicanoniques de F et de Φ.

Le système $|2\Gamma|$ a, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension au moins égale à 6. De plus, il est simple. En effet, s'il était composé, ce ne pourrait être qu'au moyen de l'involution d'ordre 3 formée par les groupes de points communs aux courbes Γ. Mais alors, les courbes bicanoniques 2Γ seraient repré-

---

[1] L. Godeaux, *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles douées d'un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914).

sentées, sur le plan triple considéré plus haut, par des coniques doubles et la dimension de $|2\Gamma|$ serait au plus égale à 5, ce qui est impossible.

Si $r \geqq 6$ est la dimension de $|2\Gamma|$, rapportons projectivement les courbes 2Γ aux hyperplans d'un S_r. On obtient une surface d'ordre 12, à sections de genre 10, birationnellement identique à Φ. Or, une courbe (simple), d'ordre 12 et de genre 10, est située dans un espace ayant au plus cinq dimensions (1). Les hyperplans de S_r ont donc au plus la dimension 5, c'est-à-dire $r - 1 \leqq 5$. On en conclut que $r = 6$.

Le système $|2C|$ n'ayant pas pour points-base les points de coïncidence de I_2, la surface Φ possède 28 points doubles coniques (points de diramation) (2).

On peut prendre, comme modèle projectif de la surface Φ, *une surface d'ordre* 12, *à sections hyperplanes de genre* 10, *de* S_6, *possédant* 28 *points doubles coniques.*

Observons en passant que $|2C|$ a la dimension 6. En effet, si $|2C|$ avait une dimension $R > 6$, il existerait sur Φ un système linéaire de degré -2 et de genre 3 (3), ce qui est absurde. On en conclut que $|2C|$ est composé avec I_2 et que le bigenre de F et celui de Φ sont tous deux égaux à 7 (4).

4. Il existe, sur la courbe A, une infinité de séries linéaires d'ordre 4, g_4^1, non spéciales. A chacune de ces séries correspond, sur F, une courbe C_i appartenant à un système continu $\{C_i\}$ comprenant le système linéaire $|C|$.

Il est aisé d'évaluer le genre et le degré d'une courbe C_i.

A un groupe de la g_4^1 correspond, sur la courbe C_i correspondante, un groupe de 6 points variable dans une série linéaire. Celle-ci possède 2 points doubles chaque fois que la g_4^1 en possède un. Or, celle-ci possède 12 points doubles, donc la g_6^1 existant sur C_i possède 24 points doubles. On a donc, si x est le

---

(1) Comessatti, *Limiti di variabilità della dimensione e dell'ordine d'una* g_n^r *sopra una curva di dato genere* (*Atti R. Ist. Veneto*, t. LXXIV, 1914-1915).

(2) L. Godeaux, *loc. cit.*

(3) L. Godeaux, *loc. cit.*

(4) *Voir* à ce sujet notre travail: *Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, 1919).

genre de C_1,

$$2(6+x-1)=24,$$

ou $x=7$.

D'autre part, d'après la formule de Schubert [1], deux séries g_6^1 ont en commun 6 couples de points, donc les deux courbes C_1 correspondantes ont 6 points communs.

Le système canonique de F appartient à un système continu complet $\{C_1\}$ de degré 6 et de genre 7.

5. La transformation T échange entre elles les courbes du système $\{C_1\}$. En effet, soit C' la courbe en laquelle T transforme une courbe C_1. Lorsque C_1 varie d'une manière continue dans $\{C_1\}$ jusqu'à coïncider avec une courbe canonique C, C' décrit un système continu $\{C'\}$ contenant cette courbe C. Par conséquent, C' ayant même degré et même genre que C_1, le système $\{C'\}$ est contenu dans le système complet $[C_1]$.

A une courbe C_1 correspond, sur la surface Φ, une courbe d'ordre 12 et de genre 7, possédant 3 points doubles. Cette courbe peut être considérée comme étant de genre virtuel 10 et de degré virtuel 12; elle varie dans un système nécessairement linéaire, puisque la surface Φ est régulière. Lorsque C_1, variant d'une manière continue dans $\{C_1\}$, devient une courbe canonique C, la courbe correspondante sur Φ devient une courbe bicanonique 2Γ; par conséquent, à une courbe C_1 correspond, sur Φ, une courbe bicanonique (possédant 3 points doubles).

Supposons qu'il existe une courbe C_1, non canonique, transformée en elle-même par T. Il lui correspond, sur Φ, une courbe bicanonique ayant une infinité de points doubles, c'est-à-dire une courbe Γ' suivant laquelle un hyperplan touche la surface Φ. La courbe Γ' a par conséquent l'ordre 6 et, étant située dans un S_5, elle est rationnelle ou elliptique.

Si la courbe C_1 envisagée passe par δ points de coïncidence de I_2, le genre x de la courbe Γ' est donné par la formule de Zeuthen

$$4(x-1)+\delta=12.$$

Si $x=1$, $\delta=12$, et si $x=0$, $\delta=16$.

---

[1] *Voir*, par exemple, F. Severi, *Lezioni di Geometria algebrica*, 1908, p. 236 (Padova, Draghi).

Observons que, parmi les séries g_4^1 non spéciales de A, il y en a 63 qui sont les lieux des points de contact de coniques quadritangentes à A. Considérons une de ces séries. On sait que, parmi les ∞^1 coniques qui touchent A aux points de chaque groupe de cette série, il y en a 6 qui dégénèrent en deux droites bitangentes à A. La courbe C_1 correspondant à cette série sur F passe donc par 12 points de coïncidence de I_2. Cette courbe est invariante pour T, car, autrement, T changerait cette courbe C_1 en une courbe C_1' de $\{C_1\}$ rencontrant la première en 12 points, alors que $\{C_1\}$ a le degré 6.

Il existe donc 63 courbes du système $\{C_1\}$, non canoniques, invariantes pour T, et il leur correspond, sur Φ, 63 courbes elliptiques du sixième ordre, le long de chacune desquelles un hyperplan touche Φ. Chacun de ces hyperplans contient 12 points doubles de la surface.

Il ne peut d'ailleurs exister une courbe de $\{C_1\}$, non canonique et distincte des précédentes, invariante pour T. S'il en existait une, elle passerait par 12 ou par 16 points de coïncidence de I_2. Dans le premier cas, elle coïnciderait nécessairement avec une des 63 courbes rencontrées plus haut, puisque $\{C_1\}$ a le degré 6. Dans le second cas, la courbe devrait comprendre comme partie une des 63 courbes, ce qui est absurde.

En résumé :

La surface représentant les couples de points d'une courbe de genre 3, *à modules généraux, de telle manière qu'à un point de la surface corresponde deux couples de points formant un groupe canonique de la courbe, est birationnellement identique à une surface d'ordre* 12, *à sections hyperplanes de genre* 10, *de* S_6, *possédant* 28 *points doubles coniques. Il existe* 63 *hyperplans passant chacun par* 12 *points doubles et touchant la surface suivant des courbes elliptiques du sixième ordre.*

6. La relation fonctionnelle reliant une des 63 courbes du sixième ordre aux sections de la surface se déduit immédiatement de la remarque, faite plus haut, qu'à une courbe C_1 quelconque correspond une courbe bicanonique de Φ (à 3 points doubles). Si l'on désigne par Γ' une des 63 courbes du sixième ordre, par

$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{12}$ les 12 courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes aux 12 points doubles de Φ que contient l'hyperplan de Γ', on a

$$2\Gamma' + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{12} \equiv 2\Gamma.$$

Remarque. — De ce qui précède, on pourrait déduire des propriétés des systèmes de courbes tracées sur la surface Φ, notamment celle-ci : L'existence d'un système linéaire de courbes sur Φ entraîne en général celle de 127 autres systèmes linéaires. Les doubles de ces 128 systèmes, augmentés éventuellement de quelques-unes des 28 courbes rationnelles équivalentes aux points doubles de Φ, sont équivalents. Mais ces propriétés sont communes à toutes les surfaces régulières représentant des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à des surfaces irrégulières. Nous les réserverons pour un travail d'ensemble.

SUR LE THÉORÈME DE MENABREA ;

PAR M. LIÉNARD.

Le général Menabrea a établi en 1858 (*C. R. Acad. Sc.*, t. XLVI, p. 1056) un théorème important de Résistance des matériaux, que l'on peut énoncer comme suit :

« Dans un système hyperstatique suivant la loi de Hooke [1] et soumis à des forces données, les valeurs que prennent les forces (ou les couples) de liaison surabondantes rendent minimum le potentiel interne Π du système, considéré comme fonction de ces forces de liaison surabondantes. »

En fait, le général Menabrea établit simplement que $d\Pi = 0$. Il ajoute ensuite, sans autre explication : « Il est facile de s'assurer que les équations [obtenues] correspondent au minimum et non au maximum. » Les démonstrations de l'existence d'un minimum,

[1] Déplacements et rotations fonctions linéaires des forces et couples. Dans ce qui suit, j'emploierai les mots *forces* et *déplacements* dans le sens généralisé qu'on leur donne en mécanique pour les équations de Lagrange.

données depuis 1858 par Menabrea ou d'autres auteurs, sont elles-mêmes insuffisantes, comme l'a bien remarqué M. de Fontviolant [1]. Il est seulement établi que les dérivées secondes de H de la forme $\frac{\partial^2 H}{\partial F^2}$ sont positives, ce qui est une condition nécessaire, mais non suffisante, de minimum.

Pour établir qu'il y a réellement minimum, je m'appuierai sur la propriété suivante des formes quadratiques :

Soit $F(y_1, y_2, \ldots, y_m, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction quadratique des variables y et z, et soient $p_1, p_2, \ldots$ les dérivées partielles de F par rapport à $y_1, y_2, \ldots$, et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les dérivées partielles par rapport à $z_1, z_2, \ldots, z_n$:

$$(1) \qquad q_1 = \frac{\partial F(y, z)}{\partial z_1}, \qquad q_2 = \frac{\partial F}{\partial z_2}, \qquad \ldots, \qquad q_n = \frac{\partial F}{\partial z_n}.$$

Les équations (1) sont linéaires par rapport aux y et aux z, et l'on peut en tirer les z en fonctions linéaires homogènes des y et des q. Substituant les expressions obtenues dans F, F devient une fonction quadratique des y et des q :

$$F(y, z) \equiv \mathcal{F}(y, q).$$

Or, on démontre (*voir* plus loin) que $\mathcal{F}$ se réduit à une somme d'une fonction quadratique des y seuls et d'une autre fonction quadratique des q seuls :

$$(2) \qquad F(y, z) \equiv \mathcal{F}(y, q) \equiv \varphi(y) + \psi(q).$$

La loi d'inertie bien connue des formes quadratiques montre que, si la forme F est définie positive, il en sera de même de $\varphi(y) + \psi(q)$, et par suite, séparément, de $\varphi(y)$ et de $\psi(q)$.

Supposons maintenant que les y et les z soient les forces appliquées à un système isostatique et que F soit le potentiel interne correspondant, essentiellement positif. En vertu du théorème de Castigliano, les dérivées partielles p et q seront les déplacements correspondant respectivement aux forces y et z.

Supposons en outre, pour arriver au théorème de Menabrea, que

---

[1] Bertrand de Fontviolant, *Méthodes modernes de la Résistance des matériaux* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, octobre, novembre et décembre 1918, et Gauthier-Villars, 1920).

les y sont les forces données appliquées à un système hyperstatique, tandis que les z seront des forces remplaçant les liaisons surabondantes supprimées en vue de rendre le système isostatique. D'après (2), F se réduit à $\varphi(y)$ quand les q sont nuls, et au contraire à $\psi(q)$ quand les y sont nuls. Autrement dit, le potentiel F du système rendu isostatique est la somme du potentiel interne $\varphi(y)$ du système hyperstatique soumis aux forces données y, et du potentiel du système rendu isostatique et soumis, après suppression des forces y, aux forces z remplaçant les liaisons surabondantes; ce dernier potentiel $\psi(q)$ étant exprimé en fonction des déplacements q correspondant aux forces z. La forme $\psi(q)$, définie positive, a pour minimum la valeur zéro qu'elle atteint seulement quand tous les déplacements q sont nuls; il est ainsi bien établi que le potentiel F est minimum lorsque les forces z sont précisément égales aux réactions surabondantes qu'elles remplacent.

Notes complémentaires. — Rappelons la démonstration de la propriété utilisée. La forme quadratique $F(y, z)$ peut s'écrire

$$F(y, z) \equiv A(y) + B(y, z) + C(z), \tag{3}$$

$A(y)$ et $C(z)$ étant des formes quadratiques en y ou en z, et B étant linéaire homogène par rapport aux y d'une part et aux z d'autre part. Introduisons la fonction auxiliaire (transformation de Lagrange)

$$\begin{aligned} W &= \sum qz - F \\ &= \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial z} z - F(y, z) \\ &= \sum \frac{\partial B}{\partial z} z + \sum \frac{\partial C}{\partial z} z - [A + B + C]. \end{aligned} \tag{4}$$

Or, le fait que B est linéaire homogène en z, tandis que C est quadratique, entraîne les identités

$$\sum \frac{\partial B}{\partial z} z = B, \qquad \sum \frac{\partial C}{\partial z} z = 2C.$$

L'expression de W devient

$$W = C(z) - A(y). \tag{5}$$

W est l'excès du potentiel interne dû aux seules forces z sur le potentiel dû aux forces données y pour le système rendu isostatique.

D'autre part, en différentiant l'équation (4), où je considérerai W comme fonction des y et des q, il vient

$$\sum \frac{\partial W}{\partial y} dy + \sum \frac{\partial W}{\partial q} dq = \sum (q\, dz + z\, dq) - \sum \frac{\partial F}{\partial y} dy - \sum \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

Les termes en dz disparaissent identiquement en vertu de (1). Les différentielles restantes, $dy_1, dy_2, \ldots, dq_1, \ldots, dq_n$, étant indépendantes, on peut identifier les coefficients des dy et des dq, ce qui donne

$$\frac{\partial W(y, q)}{\partial y} + \frac{\partial F(y, z)}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

ou

$$\frac{\partial W}{\partial y} + p = 0, \tag{6'}$$

et

$$z = \frac{\partial W(y, q)}{\partial q}. \tag{7}$$

Les équations (7) sont symétriques des équations (1). On passe d'un système à l'autre par permutation des lettres F et W d'une part, z et q d'autre part. La même permutation n'altère ni l'équation (6), ni l'équation (4), qui peut s'écrire

$$W(y, q) + F(y, z) = \sum qz.$$

Il y a donc réciprocité complète du rôle des fonctions F et W, et, si l'on décompose la fonction W en une somme $A_1(y) + B_1(y, q) + C_1(q)$ comme il a été fait pour F [éq. (3)], on établira sans peine la relation suivante, symétrique de (5),

$$F(y, z) = C_1(q) - A_1(y),$$

relation qui justifie l'équation (2).

Les équations (6') et (7) montrent que la fonction $W(y, q)$ jouit de propriétés analogues à celles qui constituent pour F le théorème de Castigliano :

« La dérivée, changée de signe, de la fonction W par rapport à une force y, représente le déplacement p correspondant, tandis qu'une dérivée par rapport à un déplacement q, prise avec son signe, donne la valeur de celle des forces z à laquelle correspond le déplacement q. »

La proposition ci-dessus paraît plus curieuse qu'utile, faute de pouvoir écrire directement l'expression de $W(y, q)$ sans passer par l'intermédiaire du potentiel $F(y, z)$.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Hilton (H.). — *Plane algebraic curves.* Un volume gr. in-8 de xvi-388 pages. Oxford, Clarendon Press, 1920. Prix : 38 s.

Buhl (A.). — *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (Collection *Scientia*, n° 36). Une brochure petit in-8 de 67 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920. Prix : 6 fr.

Fubini (G.) et Vivanti (G.). — *Esercizi di Analisi matematica* (*Calcolo infinitesimale*). Con speciale riguardo alle applicazioni ad uso degli allievi dei Politecnici (Grande biblioteca tecnica, n° 13). Un volume gr. in-8 de viii-575 pages. Torino, S. T. E. N. (Società Tipografico-Editrice Nazionale), 1920. Prix : lire 58.

Stuyvaert (M.). — *Statique. Dynamique.* Un volume in-8 de 205 pages avec 58 figures dans le texte. Gand, Van Rysselbergue et Rombaut, 1920. Prix : 20 fr.

Première Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VIVANTI (Giulio). — Lezioni di analisi infinitésimale. *Parte Prima.* Seconda edizione, riveduta ed ampliata. [Leçons d'Analyse infinitésimale. Première partie. Seconde édition, revue et augmentée]. 1 vol. gr. in-8, VII-326 pages. Torino, S. Lattes e C.; 1920.

Pour marquer ici le caractère du livre de M. Vivanti, il ne sera pas inutile de traduire quelques lignes de la préface : « J'ai cherché », dit l'auteur, « à donner aux sujets traités une disposition rationnelle, de manière à rendre claire à l'esprit du lecteur la raison logique de l'ordre dans lequel se succèdent les diverses théories. Je me suis limité à quelques indications sommaires sur les types les plus généraux de fonctions mis en évidence par les récentes recherches analytiques, fonctions discontinues, non dérivables, etc. dont à mon avis l'étude doit être reportée, même pour les jeunes gens dirigés vers la carrière scientifique, à un cours complémentaire ultérieur; je n'ai pas manqué pourtant d'énoncer soigneusement dans chaque cas les conditions restrictives sous lesquelles les divers résultats sont valables. En ce qui concerne les définitions de la Géométrie différentielle, j'ai eu soin de montrer qu'elles représentent dans chaque cas la traduction la plus naturelle, en langage mathématique, des concepts fournis par les notions de la vie courante ».

Tous ces principes ont été appliqués par l'auteur avec un sens pédagogique très sûr. Il expose, dans son excellent livre, les éléments du Calcul infinitésimal et s'attache avant tout à en dégager, avec clarté et précision, le contenu logique; les concepts fondamentaux de l'analyse y sont définis et étudiés en toute rigueur, et un tel enseignement donnera à l'étudiant une base solide pour des études théoriques ou pratiques. Sans doute un premier cours de Calcul infinitésimal, commun, comme c'est le cas en général, aux étudiants de mathématiques, aux étudiants de sciences expérimentales et aux techniciens, pourra, sans être moins précis et sans

dissimuler les difficultés, faire plus large la part de l'intuition; les applications, géométriques ou autres, des théories développées pourront leur être plus étroitement rattachées. Mais cela ne diminue point l'intérêt de traités développant, d'un point de vue plus théorique, les *éléments* du Calcul infinitésimal : il faut leur laisser place, à côté d'un cours plus pratique, si l'on veut que l'enseignement corresponde aux besoins d'élèves d'aptitudes et de vocations souvent bien diverses.

Dans la première Section de son Livre, M. Vivanti expose d'abord quelques questions préliminaires : il revient ainsi sur l'introduction des nombres irrationnels et complexes, sur la notion de limite d'une succession; en ce qui concerne les ensembles, il se borne au minimum indispensable (définition et existence des points limites, notion de limite supérieure et inférieure d'un ensemble). Il étudie ensuite le concept de fonction : oscillation dans un intervalle, continuité, cas des fonctions élémentaires, notions sur les diverses sortes de discontinuités. Après quelques pages sur les séries simples d'une variable (convergence uniforme), et une soigneuse étude de la comparaison des infiniment petits, il consacre enfin quelques paragraphes aux fonctions de deux variables (domaines simples et leur frontière; toute ligne continue fermée est frontière d'un tel domaine; continuité des fonctions de deux variables).

Dans l'étude de ces théories préliminaires, si importante pour le fondement logique de l'analyse, l'Auteur a su très précisément se limiter aux développements utiles pour le but qu'il s'était proposé; ce n'est pas un des moindres mérites de son ouvrage que la simplicité de lignes qui met très nettement en relief le plan logique de l'édifice.

La suite de ce premier volume du traité de Calcul infinitésimal de M. Vivanti est divisée en deux parties : l'une consacrée aux dérivées et intégrales des fonctions d'une variable, l'autre aux dérivées et intégrales des fonctions de plusieurs variables.

L'Auteur y réalise, surtout au début, la fusion complète des deux Calculs : différentiel et intégral. Il obtient ainsi, en certains points, une plus grande brièveté de l'exposition; d'autre part, l'étudiant est ainsi plus vite en possession des procédés essentiels du Calcul. Mais on perd peut-être une partie de ces avantages à

établir une séparation, trop complète et non moins inutilement systématique, entre le cas de une et celui de plusieurs variables.

En ce qui concerne les fonctions d'une variable, l'Auteur définit successivement les dérivées et différentielles et les intégrales, définies et indéfinies, pour grouper ensuite l'étude de leurs propriétés. Nous ferons ici une légère remarque : dans un livre d'enseignement, la représentation intuitive des concepts introduits doit précéder, et non suivre, leur définition logique. Les quelques pages qui suivent sont consacrées aux formes indéterminées; il y aurait peut-être eu avantage à rapprocher cette étude de celle des développements en séries entières, et à ne pas passer sous silence l'application de ces développements aux indéterminations et à la recherche des parties principales. L'étude, effectuée ensuite, des méthodes élémentaires d'intégration, puis des extensions de la notion d'intégrale (fonction à intégrer devenant infinie, intervalle d'intégration s'étendant à l'infini) donne occasion à quelques développements, bien adaptés au caractère élémentaire du Livre, sur les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes. Enfin, pour en terminer avec le cas d'une variable, il reste à l'Auteur, après le calcul des différentielles successives, à donner la formule de Taylor et ses applications aux développements en série des fonctions élémentaires.

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire, la dernière partie du volume est consacrée aux fonctions de plusieurs variables. La définition de leurs dérivées et différentielles y est accompagnée des développements habituels sur l'inversion des signes de dérivation (avec l'exemple classique pour montrer que cette inversion n'est pas toujours possible), sur les fonctions composées et homogènes. La théorie des fonctions implicites est alors traitée avec quelque détail : définition et propriétés des déterminants fonctionnels, étude complète de la résolution d'une relation entre deux variables, cas généraux et conditions pour que des fonctions de plusieurs variables soient ou non indépendantes (ici l'Auteur s'est parfois justement limité à énoncer les résultats; il les a toujours précisés, ce qui était plus important, par quelques exemples). L'Auteur établit ensuite la formule de Taylor pour plusieurs variables, et l'applique à l'étude des maxima et minima; quelques indications sont données sur les problèmes d'extréma liés.

Il reste enfin l'étude des intégrales multiples; elle est précédée, comme il convient, de notions sur les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre : continuité, dérivation, cas où les limites d'intégration sont infinies. Alors, après avoir précisé logiquement la notion d'aire, M. Vivanti expose la définition des intégrales doubles et leurs relations avec les intégrales curvilignes, qui sont introduites ici (formule de Green). Comme il s'est contenté de dire que l'on définira de même les intégrales multiples, on est un peu surpris de le voir établir, pour le cas général, la formule du changement de variable : il est vrai que la démonstration, très heureusement présentée, n'est pas plus compliquée, et que l'Auteur insiste ensuite plus particulièrement sur le cas de deux variables, auquel il s'était borné jusque-là.

J. Pérès.

WHITEHEAD (A.-N.) — An enquiry concerning the principles of natural Knowledge [Enquête sur les principes de la connaissance de la nature]. 1 vol. in-8, XII-200 pages. Cambridge, University Press, 1919.

The concept of nature [Le concept de nature]. 1 vol. in-8, X-202 pages. Cambridge, University Press, 1920.

Mathématicien, logicien, et philosophe, M. Whitehead était remarquablement qualifié pour étudier à nouveau, dans son ensemble et sous toutes ses faces, le redoutable problème relatif à l'origine des notions d'espace et de temps. Ses deux récents ouvrages nous apportent, sur ce sujet, non seulement une très solide étude critique, mais une œuvre constructive, extrêmement originale et suggestive.

La question de la relativité tient naturellement une grande place dans l'étude de M. Whitehead. On sent que les travaux d'Einstein ont exercé une influence directe sur sa pensée et ont même aidé celle-ci à se préciser durant l'année qui a séparé la publication des deux volumes auxquels nous nous référons. Toutefois, si M. Whitehead pose les mêmes problèmes qu'Einstein, s'il adopte (ou peu s'en faut) les formules et déductions mathématiques du grand savant suisse, il refuse de se rallier à sa philosophie.

M. Whitehead raille agréablement la foule des admirateurs

d'Einstein, dont les esprits sont surtout séduits par les côtés paradoxaux des théories nouvelles, et pour qui la relativité se résume dans cette sensationnelle manchette d'un grand journal londonien : *L'espace pris en flagrant délit de courbure.* M. Whitehead, quant à lui, n'admet pas plus l'espace courbé d'Einstein que l'espace non-courbé de la mécanique ordinaire. Dans la conception classique de l'espace, du temps, de la matière (et de l'éther), il voit un reste des préjugés que la Physique grecque nous a légués.

D'autre part, les systèmes fondés sur cette conception sont viciés, selon lui, par une fausse théorie de la connaissance. On voudrait que la Science fût le résultat de la réunion de deux éléments : l'un apporté par les sens, l'autre ajouté par l'esprit. Ainsi, nous nous trouverions connaître deux mondes distincts, dont l'un, celui des sens, ne serait qu'un monde de rêve, tandis que l'autre, celui de la Science, serait purement conjectural. M. Whitehead ne veut ni de l'un ni de l'autre, et il nous propose d'étudier avec lui le véritable monde, le seul réel, c'est-à-dire le monde formé par l'ensemble des *faits objectifs* qui constituent ce qu'il y a de certain dans nos sensations.

Partant de cette idée, M. Whitehead montre sans peine que l'on ne saurait regarder comme un élément primordial de la Science, ni le *point* (comme le voudraient les géométries axiomatiques, lesquelles se proposent de fonder toutes les propositions géométriques sur les axiomes relatifs aux points, droites, plans), ni, non plus, *l'instant.* Nous n'observons jamais ni point, ni instant, mais seulement des choses et des durées. C'est par un procédé logique de passage à la limite (analysé en grand détail par M. Whitehead) que nous parvenons à la notion d'instant et à celle *d'espace instantané* (espace au temps t). Rassemblant ensuite en un seul tous les espaces instantanés que nous pouvons concevoir, nous en tirons notre idée d'espace permanent (ou, plutôt, d'espace conçu hors du temps).

La mécanique classique suppose (sans le dire) que tous les espaces permanents, ainsi déduits des observations, sont identiques entre eux, et constituent *l'espace absolu.* Mais cette inférence est illégitime. En étudiant le processus logique qui engendre l'espace, on constate qu'à des observateurs différents correspondront des espaces différents. L'espace instantané *présent* d'un

observateur terrestre, par exemple, ne saurait coïncider avec aucun espace instantané d'un habitant de Mars; il en résulte qu'un événement *actuel* pour le premier pourra être *passé* ou *futur* pour le second; les mesures de temps des deux observateurs ne sont donc pas comparables. Ainsi s'expliquent, en particulier, les paradoxes de la théorie de la relativité restreinte (Lorentz) sans que l'on soit obligé d'attribuer à la vitesse de la lumière un rôle unique et privilégié parmi les autres phénomènes physiques.

D'ailleurs, s'il n'existe pas de classement absolu des événements dans le temps, il n'en existe pas davantage dans l'espace. Les événements, les objets (M. Whitehead montre comment nous passons de la perception des événements à la notion *d'objet*) impliquent, comprennent, certains champs d'activité; et l'événement qui se déroule dans un tel champ en reçoit un certain *impetus*. C'est ainsi que M. Whitehead explique les propriétés du champ de gravitation d'Einstein. Dès lors, tandis que, pour Einstein, ces propriétés sont dues à la courbure de l'espace-temps (à quatre dimensions), elles tiendraient uniquement, selon Whitehead, aux propriétés de l'espace et des temps artificiels que construit le physicien (par voie d'abstraction) afin *de pouvoir* énoncer en termes simples les lois de la Mécanique. Et cette conclusion, remarque M. Whitehead, est conforme au bon sens. Car il est raisonnable de regarder le concept d'espace et de temps comme le résultat des généralisations les plus simples tirées de l'expérience, plutôt que comme l'aboutissement d'une suite de transformations d'équations différentielles.

PIERRE BOUTROUX.

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE DE L'INTERPOLATION DE STIRLING ET LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. K. OGURA.

(Publié par les soins de M. J. Hadamard.)

M. Pólya [1] a recherché les racines des fonctions entières

$$U(z) = \int_0^1 g(t) \cos zt\, dt \qquad \text{et} \qquad V(z) = \int_0^1 g(t) \sin zt\, dt:$$

M. Kakeya [2] a fait une étude approfondie des racines des fonctions de la forme

$$W(z) = \int_a^b g(t)\, \varphi(z, t)\, dt.$$

On trouve aussi un théorème d'Hurwitz sur les racines de la fonction $U(z)$ dans le Mémoire de M. Pólya.

Je me propose, dans cette Note, de donner quelques généralisations du théorème d'Hurwitz; mais, puisque ma méthode de démonstration dépend de la formule de l'interpolation de Stirling, je traiterai d'abord la théorie de cette interpolation.

I.

1. *Lemme I.* — Soit

$$\ldots,\ f(-n),\ \ldots,\ f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

une suite de nombres qui satisfont aux conditions

$$f(-n) = f(n), \qquad |f(n)| < K \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

---

(1) G. PÓLYA, *Ueber die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen* (*Mathematische Zeitschrift*, t. II, 1918, p. 352).

(2) S. KAKEYA, *On zero points of function defined by some definite integral* (*Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, 3e série, t. II, 1920, p. 158).

où K désigne une constante réelle et positive, indépendante de n. Si l'on pose

$$f(n) \equiv f_n, \qquad \delta^{2n} f_0 \equiv f_n - \binom{2n}{1} f_{n-1} + \binom{2n}{2} f_{n-2} - \ldots + f_{-n},$$

la série (série de *Laplace-Stirling*)

$$(1) \qquad \varphi(z) \equiv f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}\,\delta^{2n} f_0$$

est uniformément et absolument convergente pour toute valeur de z, et la fonction $\varphi(z)$ représentée par cette série est une fonction entière et paire qui satisfait aux conditions

$$\varphi(n) = f(n) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

et

$$|\varphi(z)| \leqq \frac{K}{2}(e^{\pi r} + e^{-\pi r}) \qquad (|z| = r).$$

Car, puisque la formule [1]

$$\cos \pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}\, 2^{2n}$$

est valable pour toute valeur de z, la formule

$$\cos(\pi i \rho) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^2(\rho^2+1^2)\ldots(\rho^2+\overline{n-1}^2)}{(2n)!}\, 2^{2n}$$

est aussi valable pour toute valeur réelle de ρ.

A l'aide de l'identité

$$\delta^{2n} f_0 = f_n - \binom{2n}{1} f_{n-1} + \binom{2n}{2} f_{n-2} - \ldots + f_{-n},$$

on obtient

$$|\delta^{2n} f_0| \leqq K\left[1 + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \ldots + 1\right]$$
$$= 2^{2n} K.$$

De plus, on a

$$|z^2 - n^2| \leqq r^2 + n^2 \qquad (|z| = r).$$

---

[1] Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 2, p. 67.

Donc

$$
\begin{aligned}
|f_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!} \right| |\delta^{2n} f_0| \\
\leq K \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(r^2+1^2)\ldots(r^2+\overline{n-1}^2)}{(2n)!} 2^{2n} \right] \\
= K \cos(\pi i r).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la série (1) converge uniformément et absolument pour toute valeur de z; donc $\varphi(z)$ est une fonction entière et paire telle que

$$|\varphi(z)| \leq K \cos(\pi i r) = \frac{K}{2}(e^{\pi r} + e^{-\pi r});$$

et il est facile de démontrer que

$$\varphi(n) = f(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. Théorème I. — *Si $t(z)$ est une fonction entière et paire qui satisfait à la condition*

$$|f(z)| < e^{\lambda|z|}, \qquad 0 < \lambda < \log 2 \qquad \text{pour } |z| > R,$$

cette fonction peut être représentée par la formule de Stirling.

En effet, à l'aide de l'identité

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x} = \sum_{\nu=1}^{n} \Bigg[& \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{\nu-1}^2)}{x(x^2-1^2)\ldots(x^2-\overline{\nu-1}^2)(x-\nu)} \\
& + \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{\nu-1}^2)(z-\nu)}{x(x^2-1^2)\ldots(x^2-\overline{\nu-1}^2)(z^2-\nu^2)} \Bigg] \\
& + \frac{1}{x-z} \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{x(x^2-1^2)\ldots(x^2-n^2)},
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
f(z) = f_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \Bigg[& \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{\nu-1}^2)}{(2\nu-1)!} \delta^{2\nu-1} f_{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{\nu-1}^2)(z-\nu)}{(2\nu)!} \delta^{2\nu} f_0 \Bigg] \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{x(x^2-1^2)\ldots(x^2-n^2)} \frac{f(x)\,dx}{x-z},
\end{aligned}
$$

le contour de l'intégration C_n désignant le cercle $|z| = n + \frac{1}{2}$.

Puisque la fonction $f(z)$ est paire, on a

$$f(z) = f_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z^2(z^2-1^2)\dots(z^2-\overline{\nu-1}^2)}{(2\nu)!}\,\delta^{2\nu} f_0 + R_n(z),$$

où

$$R_n(z) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\, z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\int_{C_n} \frac{(n!)^2 f(x)}{x(x^2-1^2)\dots(x^2-n^2)}\,\frac{dx}{x-z}.$$

Puisque

$$|f(x)| < 2^{\mu|x|}, \qquad 0 < \mu < 2, \qquad |x| \geqq n,$$

et

$$|x^2-p^2| \geqq \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - p^2 \qquad \text{pour } p = 0, 1, \dots, n.$$

$$x = \left(n+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta},$$

nous avons

$$\left|\frac{(n!)^2 f(x)}{x(x^2-1^2)\dots(x^2-n^2)}\right| \left[\text{pour } x = \left(n+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}\right]$$

$$\leqq \frac{(n!)^2\, 2^{\mu\left(n-\frac{1}{2}\right)}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{n+\frac{1}{2}}^2-1^2\right)\dots\left(\overline{n+\frac{1}{2}}^2-n^2\right)}$$

$$= \frac{(n!)^2.(2n)!\,2^{4n+\mu n+\frac{\mu}{2}+1}}{(4n+1)!}$$

$$= k\,\frac{2^{(6+\mu)n}.n^{4n+\frac{2}{2}}}{(4n+1)^{4n+\frac{3}{2}}},$$

k étant une constante réelle et positive. Donc

$$\lim_{n=\infty} |R_n(z)| = k\,\frac{\sin\pi z}{\pi}\lim_{n=\infty}\frac{2^{(6+\mu)n}.n^{4n+\frac{3}{2}}}{(4n+1)^{4n+\frac{3}{2}}} = 0.$$

3. Théorème I *bis*. — *Soit $f(z)$ une fonction entière et paire qui satisfait aux conditions*

$$|f(n)| \leqq K \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

où K *est une constante indépendante de n. Pour que cette fonction $f(z)$ puisse être représentée par la formule de Stir-*

ling (1), *il faut que cette fonction satisfasse à la condition*

$$|f(z)| \leqq \frac{K}{2}(e^{\pi r} + e^{-\pi r}) \quad (^1).$$

Puisque la fonction $f(z)$ est paire et satisfait aux conditions

$$|f(n)| \leqq K \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

la série

$$\varphi(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}\delta^{2n} f_0$$

est absolument convergente pour toute valeur de z, donc on peut la mettre sous la forme

$$\varphi(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n-1)!}\delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}} + \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}(z-n)\,\delta^{2n} f_0\right]$$

ou

$$\varphi(z) = \mu f_{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-2}^2)(z-\overline{n-1})\left(z-\frac{1}{2}\right)}{(2n-1)!}\delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}} + \frac{z(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)(z-n)}{(2n)!}\mu\delta^{2n} f_{\frac{1}{2}}\right],$$

en posant

$$\delta^{2n-1} f_{\frac{1}{2}} = f_n - \binom{2n-1}{1} f_{n-1} + \binom{2n-1}{2} f_{n-2} - \ldots - f_{-(n-1)},$$

$$2\mu\,\delta^{2n} f_{\frac{1}{2}} = \left[f_{n+1} - \binom{2n}{1} f_n + \binom{2n}{2} f_{n-1} - \ldots + f_{-(n-1)}\right] + \left[f_n - \binom{2n}{1} f_{n-1} + \binom{2n}{2} f_{n-2} - \ldots + f_{-n}\right].$$

Or, pour que $f(z)$ puisse être représentée par la formule de Stirling (de Gauss ou de Bessel), il faut que

$$f(z) = \varphi(z)$$

pour toute valeur de z; donc, d'après le lemme I. nous devons

(1) Il faut remarquer que la fonction $f(z) = \operatorname{ch} z$ ne satisfait pas aux conditions $|f(n)| \leqq K$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, mais elle peut être représentée par la formule de Stirling.

avoir l'inégalité

$$(2) \qquad |f(z)| \leq \frac{K}{2}(e^{\pi r} + e^{-\pi r}).$$

4. Théorème II. — *Soit* $F(z, t)$ *une fonction entière et paire de* z, *contenant le paramètre réel* t, *définie par la formule de Stirling qui converge uniformément pour* $|z| < \infty$, $a \leq t \leq b$ (a, b *étant deux nombres réels et finis*). *Si* $g(t)$ *est une fonction pour laquelle* $\int_a^b g(t)\,dt$ *et* $\int_a^b |g(t)|\,dt$ *existent, la fonction*

$$f(z) = \int_\alpha^\beta g(t)\,F(z, t)\,dt \qquad (a \leq \alpha < \beta \leq b)$$

peut être représentée par la formule de Stirling [1].

En effet, puisque la série

$$F(z, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $a \leq t \leq b$, on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_\alpha^\beta g(t)\,F(z, t)\,dt \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}, \end{aligned}$$

où

$$b_n = \int_\alpha^\beta g(t)\,a_n(t)\,dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

pour toute valeur de z. Donc

$$f(0) = b_0, \qquad f(-1) = f(1) = b_0 + \frac{b_1}{2!}, \qquad \ldots,$$

ce qui donne

$$b_0 = f_0, \qquad b_n = \delta^{2n} f_0.$$

Par exemple, si l'on pose

$$F(z, t) = \cos\lambda t z \quad (-\pi \leq \lambda \leq \pi), \qquad \alpha = a = -1, \qquad \beta = b = 1),$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}},$$

---

[1] Il est facile de généraliser ce théorème à d'autres interpolations, si nous changeons convenablement les conditions sur $F(z, t)$.

on obtient

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos \lambda t z}{\sqrt{1-t^2}} dt = J_0(\lambda z),$$

où $J_0(z)$ désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Si l'on pose

$$F(z, t) = J_0(\lambda t z) \quad (-\pi \leqq \lambda \leqq \pi), \qquad \alpha = a = 0, \qquad \beta = b = 1,$$
$$g(t) = t(1-t^2)^{\rho-1} \qquad (\rho > 0)$$

et

$$t = \cos\theta,$$

on a

$$f(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(\lambda z \cos\theta) \cos\theta \sin^{2\rho-1}\theta \, d\theta$$
$$= \frac{2^{\rho-1}\Gamma(\rho)}{\lambda^\rho z^\rho} J_\rho(\lambda z) \quad (^1),$$

$J_\rho(z)$ étant la fonction de Bessel d'ordre ρ.

Ainsi *la fonction*

$$z^{-\rho} J_\rho(\lambda z) \qquad (\rho \geqq 0, \ -\pi \leqq \lambda \leqq \pi)$$

peut être représentée par la formule de Stirling pour toute valeur de z.

II.

5. Soit $f(z)$ une fonction entière et paire qui peut être représentée par la formule de Stirling

$$f(z) = f_0 + \frac{z^2}{2!}\delta^2 f_0 + \ldots + \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}\delta^{2n} f_0 + \ldots$$

pour toute valeur de z.

Supposons, par exemple, que

$$f(0) > 0, \qquad f(1) < 0, \qquad f(2) > 0, \qquad f(3) < 0, \qquad \ldots;$$

alors on a

$$\operatorname{sign} \delta^{2n} f_0 = (-1)^n.$$

---

(1) *Voir* NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*, p. 181.

Considérons le polynome $f_{2n}(z)$ de degré $2n$:

$$f_{2n}(z) = f_0 + \frac{z^2}{2!}\delta^2 f_0 + \ldots + \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-\overline{n-1}^2)}{(2n)!}\delta^{2n} f_0.$$

Puisque $f_{2n}(p) = f(p)$ $(p = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$, le polynome $f_{2n}(z)$ a $2n$ racines réelles $\pm z_{2n}^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ telles que

$$p - 1 < z_{2n}^{p} < p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

De l'identité

$$f_{2n+2}(z) = f_{2n}(z) + \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots(z^2-n^2)}{(2n+2)!}\delta^{2n+2} f_0,$$

on déduit

$$\begin{aligned}\operatorname{sign} f_{2n+2}(z_{2n}^{p}) &= \operatorname{sign}(z_{2n}^{(p)})^2[(z_{2n}^{p})^2 - 1^2]\ldots[(z_{2n}^{p})^2 - n^2]\delta^{2n+2} f_0 \\ &= (-1)^{n-p+1}(-1)^{n+1} = (-1)^p.\end{aligned}$$

Mais, puisque

$$\operatorname{sign} f_{2n+2}(p-1) = \operatorname{sign} f(p-1) = (-1)^{p-1},$$

le polynome $f_{2n+2}(z)$ a $2n+2$ racines réelles

$$\pm z_{2n+2}^{p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n+1)$$

telles que

$$p - 1 < z_{2n+2}^{p} < z_{2n}^{(p)} < p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$
$$n < z_{2n+2}^{n+1} < n + 1.$$

En général, on obtient

$$p - 1 < \ldots < z_{2n+2m}^{p} < z_{2n-2m-2}^{(p)} < \ldots < z_{2n}^{(p)} < p \qquad (m = 1, 2, \ldots):$$

par conséquent, l'ensemble $z_{2n}^{(p)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ admet un et un seul point de condensation $z^{(p)}$, de sorte que $p - 1 \leqq z^{(p)} < p$. Donc, par un théorème d'Hurwitz [1], on peut conclure que toutes les racines de $\lim\limits_{n=\infty} f_{2n}(z)$, c'est-à-dire de $f(z)$, sont réelles et simples et chacun des intervalles $(p-1, p)$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ contient une racine. Mais puisque $f(p-1) \neq 0$, la racine $z^{(p)}$ est contenue dans l'intérieur de l'intervalle $(p-1, p)$. Ainsi nous avons le théorème suivant :

---

[1] A. Hurwitz, *Ueber die Nullstellen der Besselschen Funktion* (*Mathematische Annalen*, t. XXXIII, 1889, p. 246).

THÉORÈME III. — *Soit $f(z)$ une fonction entière et paire qui peut être représentée par la formule de Stirling pour toute valeur de z. Si toutes les valeurs*

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \ldots$$

sont réelles et ont des signes alternés, toutes les racines de la fonction sont réelles et simples, et chacun des intervalles

$$\ldots,\quad (-3,-2),\quad (-2,-1),\quad (-1,0),\quad (0,1),\quad (1,2),\quad (2,3),\quad \ldots$$

contient à son intérieur une et une seule racine (¹).

6. En combinant les théorèmes I et III, on peut établir le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit $f(z)$ une fonction entière et paire qui satisfait aux conditions*

$$|f(n)| \leqq K \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$|f(z)| \leqq e^{\lambda|z|}, \qquad \lambda < 2,$$

(¹) D'une manière semblable, on peut démontrer les deux théorèmes suivants :

1° *Soit $f(z)$ une fonction entière et impaire qui peut être représentée par la formule de Stirling pour toute valeur de z. Si toutes les valeurs $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... sont réelles et ont des signes alternés, toutes les racines de la fonction sont réelles et simples, et chacun des intervalles*

$$\ldots(-3,-2),\quad (-2,-1),\quad (1,2),\quad (2,3),\ \ldots$$

contient à son intérieur une et une seule racine.

2° *Soit $f(z)$ une fonction entière qui peut être représentée par la formule de Newton*

$$f(z) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1)}{n!}\,\delta^n f_{\frac{n}{2}},$$

où

$$\delta^n f_{\frac{n}{2}} = f_n - \binom{n}{1} f_{n-1} + \binom{n}{2} f_{n-2} - \ldots + (-1)^n f_0$$

pour toute valeur de z. Si toutes les valeurs $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... sont réelles et ont des signes alternés, toutes les racines de la fonction sont réelles et simples, et chacun des intervalles

$$(0,1),\quad (1,2),\quad (2,3),\ \ldots$$

contient à son intérieur une et une seule racine.

K étant une constante réelle et positive, indépendante de n. Si toutes les valeurs

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad \ldots$$

sont réelles et ont des signes alternés, toutes les racines de la fonction $f(z)$ sont réelles et simples, et chacun des intervalles

$$\ldots,\quad (-2,-1),\quad (-1,0),\quad (0,1),\quad (1,2),\quad \ldots$$

contient à son intérieur une et une seule racine.

D'une manière semblable, en combinant les théorèmes II et III, on obtient le théorème suivant :

Théorème V. — *Soit $F(z, t)$ une fonction entière et paire de z, contenant le paramètre réel t, définie par la formule de Stirling qui converge uniformément pour $|z| < \infty$, $a \leqq t \leqq b$ (a, b étant deux nombres réels et finis). Soient $g(t)$ une fonction pour laquelle $\int_a^b g(t)\,dt$ et $\int_a^b |g(t)|\,dt$ existent, et $f(z)$ la fonction définie par l'intégrale*

$$\int_\alpha^\beta g(t)F(z, t)\,dt \qquad (a \leqq \alpha < \beta \leqq b).$$

Si toutes les valeurs

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad \ldots$$

sont réelles et ont des signes alternés, toutes les racines de la fonction $f(z)$ sont réelles et simples, et chacun des intervalles

$$\ldots,\quad (-2,-1),\quad (-1,0),\quad (0,1),\quad (1,2),\quad \ldots$$

contient à son intérieur une et une seule racine.

En particulier, dans le cas où

$$F(z, t) = \cos \pi t z, \qquad a = \alpha = -1, \qquad b = \beta = 1,$$

nous avons *le théorème d'Hurwitz* [1].

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Pólya déjà cité.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE BARLOW;

PAR M. C. DE JANS.

1. Le problème dit de Barlow a pour objet la détermination du changement éprouvé par un champ magnétique uniforme, après l'introduction dans celui-ci d'une couche sphérique en fer doux d'épaisseur invariable. Sa solution, donnée dans les ouvrages classiques (1), s'adapte également au cas d'une couche diélectrique homogène et isotrope, limitée par deux surfaces sphériques concentriques, et placée dans un champ électrostatique primitivement uniforme. Ce problème a été généralisé en deux sens : d'une part, on a considéré le cas d'un nombre quelconque de milieux, séparés par des sphères concentriques (2); d'autre part, on a remplacé la sphère creuse initiale par une couche comprise entre deux ellipsoïdes homofocaux (3). Nous nous proposons d'étendre la question au cas où les surfaces de séparation consistent en de pareils ellipsoïdes en nombre arbitraire.

La solution s'appliquera indifféremment au cas de milieux diélectriques ou de milieux magnétiques; mais, pour fixer les idées, nous raisonnerons sur des milieux de la première sorte.

Désignons par $E_1, E_2, \ldots, E_n$ les ellipsoïdes homofocaux, numérotés de 1 à n dans l'ordre de leur succession de l'intérieur vers l'extérieur. Appelons ε_1 le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique remplissant l'ellipsoïde E_1, ε_h celui du diélectrique enfermé entre les ellipsoïdes E_{h-1} et E_h, ε_{n+1} celui du diélectrique occupant l'espace extérieur à l'ellipsoïde E_n. Nous supposons tous ces diélectriques homogènes, isotropes, et à l'état neutre; éventuellement, le vide sera considéré comme un milieu dont le pouvoir

(1) *Voir*, par exemple, E. MASCART et J. JOUBERT, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. I, Paris, 1882, p. 423 et suiv.

(2) *Ibid.*, p. 171-175.

(3) A.-G. GREENHILL, *Sur le magnétisme induit d'un ellipsoïde creux* (*Journal de Physique théorique et appliquée*, t. X, 1881, p. 294-303).

inducteur, dans un système d'unités convenable, est mesuré par l'unité.

Imaginons le système précédent introduit dans un champ électrostatique uniforme, que nous appellerons le champ *initial* ou *inducteur*, et que nous supposerons défini par sa fonction potentielle V_0. Il s'agit de déterminer la fonction potentielle V du champ final, c'est-à-dire du champ modifié par l'état de polarisation du système diélectrique.

Dans le cas le plus général, le champ inducteur peut être regardé comme résultant de la superposition de trois champs, respectivement parallèles aux axes principaux des ellipsoïdes. Il suffira donc de résoudre le problème dans l'hypothèse où le champ initial est dirigé successivement suivant chacun des trois axes.

2. Nous ferons usage d'un système bien connu de coordonnées elliptiques. Soient a, b, c les longueurs des demi-axes d'un ellipsoïde quelconque E, homofocal avec les ellipsoïdes donnés; supposons

$$a < b < c. \tag{1}$$

Si, en particulier, a_h, b_h, c_h désignent les demi-axes de l'ellipsoïde $E_h (h = 1, 2, \ldots, n)$, ces grandeurs satisfont également aux inégalités (1).

Définissons une fonction $\wp$ par les constantes réelles

$$e_1 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - a^2, \qquad e_3 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - b^2,$$
$$e_2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - c^2.$$

Cette fonction $\wp$ possède une période réelle $2\omega_1$ et une période purement imaginaire $2\omega_2$; nous définirons une constante ω_3 par l'égalité

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Si maintenant x, y, z sont les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, par rapport à un système d'axes Ox, Oy, Oz, coïncidant respectivement avec les axes a_h, b_h, c_h des ellipsoïdes E_h, on sait qu'il existe trois arguments u, v, w, qui rendent la fonction $\wp$ réelle, que l'on peut choisir de manière à avoir

$$e_2 < \wp w < e_3 < \wp v < e_1 < \wp u. \tag{2}$$

et qui donnent

$$(3)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(pu - e_1)(pv - e_1)(pw - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \\ y^2 = \dfrac{(pu - e_3)(pv - e_3)(pw - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}, \\ z^2 = \dfrac{(pu - e_2)(pv - e_2)(pw - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}. \end{cases}$$

Nous prendrons ces arguments comme coordonnées elliptiques du point (x, y, z).

L'équation

$$(4)\qquad u = \text{const.},$$

dans laquelle la constante acquiert toutes les valeurs réelles comprises entre o et ω_1, représente tous les ellipsoïdes du système homofocal. Nous désignerons par u_h la valeur de cette constante sur l'ellipsoïde E_h.

Si (4) est l'équation de l'ellipsoïde E, on a

$$(5)\qquad pu = a^2 + e_1 = b^2 + e_3 = c^2 + e_2, \qquad p'u = -2abc.$$

3. On sait que la fonction V est complètement déterminée par les conditions suivantes :

1° Elle est uniforme et continue dans tout l'espace;

2° Elle satisfait à l'équation de Laplace dans toute l'étendue d'un même milieu;

3° Elle se réduit à V_0 à distance infinie;

4° En deux points infiniment voisins, situés de part et d'autre de la surface de séparation de deux milieux, les composantes normales de l'intensité de champ sont entre elles dans le rapport inverse des pouvoirs inducteurs spécifiques;

5° L'intensité de champ ne peut devenir infinie.

Le problème sera donc résolu, si nous parvenons à construire une fonction V satisfaisant à ces conditions.

4. Supposons, en premier lieu, le champ initial parallèle aux petits axes des ellipsoïdes; l'expression de V_0, dans laquelle nous pouvons faire abstraction d'une constante arbitraire additive, sera

de la forme

$$V_0 = Ax.$$

A étant une constante déterminée. Posons

$$P = \sqrt{pu - e_1}, \qquad Q = \sqrt{pv - e_1}, \qquad R = \sqrt{pw - e_1}.$$

Ces fonctions satisfont à une équation de Lamé; on sait que la fonction

$$P_1 = P \int_0^u \frac{du}{P^2}$$

y satisfait également, et que le produit des trois fonctions P_1, Q, R sera une solution de l'équation de Laplace. Ce produit, d'ailleurs, n'est, à un facteur constant près, autre chose que

$$Ax \int_0^u \frac{du}{pu - e_1}.$$

D'autre part, la fonction $V_0 = Ax$ satisfait également à l'équation de Laplace. Si donc α et β représentent des constantes arbitraires, la fonction

$$(6) \qquad V = Ax\left(\alpha - \beta \int_0^u \frac{du}{pu - e_1}\right)$$

sera une solution de cette équation, uniforme dans tout l'espace.

Nous allons tâcher de déterminer les constantes α et β de manière que la fonction (6) satisfasse aux autres conditions imposées à la fonction potentielle. Les constantes en question pourront, bien entendu, avoir des valeurs différentes dans les divers diélectriques considérés.

Nous poserons, pour abréger,

$$I = \int_0^u \frac{du}{pu - e_1};$$

nous appellerons V_h l'expression de la fonction V dans le milieu de pouvoir inducteur ε_h, et nous écrirons, conformément à l'équation (6),

$$(7) \qquad V_h = Ax(\alpha_h - \beta_h I),$$

pour $h = 1, 2, \ldots, n+1$. Les fonctions V_h sont continues,

chacune dans le diélectrique qui lui correspond. La continuité de la fonction V exige qu'à la séparation de deux milieux on ait

$$V_h = V_{h+1};$$

par conséquent, si I_h est la valeur de I pour $u = u_h$,

$$\alpha_h - \beta_h I_h = \alpha_{h+1} - \beta_{h+1} I_h. \tag{8}$$

Conformément à la condition 3° du n° 3, on a encore

$$\lim_{u=0} \frac{V_{n+1}}{V_0} = 1,$$

ce qui donne

$$\alpha_{n+1} = 1. \tag{9}$$

5. Il nous reste à satisfaire aux deux dernières conditions du n° 3.

A un point quelconque (u, v, w), faisons correspondre trois vecteurs unitaires $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; le premier, normal à l'ellipsoïde $u = \text{const.}$, et dirigé vers l'intérieur de ce dernier; le deuxième et le troisième, respectivement normaux aux hyperboloïdes à une et à deux nappes $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, et dirigés dans les sens où les grandeurs réelles $\frac{v - \omega_1}{i}$ et $w - \omega_2$ sont croissantes.

Dans ces conditions, le gradient de la fonction V est donné par la formule

$$\operatorname{grad} V = \frac{1}{m}\left(\mathbf{a}\frac{\partial V}{\partial u}\sqrt{pv - pw} - \mathbf{b}\frac{\partial V}{\partial v}\sqrt{pw - pu} + \mathbf{c}\frac{\partial V}{\partial w}\sqrt{pu - pv}\right), \tag{10}$$

dans laquelle on a posé

$$m^2 = -(pu - pv)(pv - pw)(pw - pu).$$

La condition 4° du n° 3 exige donc que l'on ait, sur l'ellipsoïde E_h,

$$\varepsilon_h \left(\frac{\partial V_h}{\partial u}\right)_{u=u_h} = \varepsilon_{h+1}\left(\frac{\partial V_{h+1}}{\partial u}\right)_{u=u_h}. \tag{11}$$

Or, de (3) et de (7), on déduit

$$\frac{\partial V_h}{\partial u} = A\frac{\partial x}{\partial u}\left[\alpha_h - \beta_h\left(\frac{2}{p'u} + 1\right)\right].$$

En posant

$$S = -\frac{2}{p'u} - 1, \tag{12}$$

et en désignant par S_h la valeur que prend cette fonction pour $u = u_h$, la relation (11) devient

$$\varepsilon_h \alpha_h - \varepsilon_{h+1} \alpha_{h+1} + (\varepsilon_h \beta_h - \varepsilon_{h+1} \beta_{h+1}) S_h = 0, \tag{13}$$

pour $h = 1, 2, \ldots, n$.

Pour exprimer enfin que l'intensité de champ doit rester partout finie, désignons par F_h, G_h, H_h ses composantes suivant les vecteurs trirectangulaires **a**, **b**, **c**. Si nous posons

$$f(\lambda, \mu, \nu) = A \sqrt{\frac{(e_1 - p\mu)(e_1 - p\nu)(p\lambda - e_2)(p\lambda - e_3)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(p\lambda - p\mu)(p\lambda - p\nu)}},$$

la formule (10) donne, par multiplication scalaire successive avec les vecteurs **a**, **b**, **c**,

$$\left\{\begin{aligned} F_h &= -\,\mathbf{a}\,\mathrm{grad}\,V = f(u, v, w)(\alpha_h + \beta_h S), \\ G_h &= -\,\mathbf{b}\,\mathrm{grad}\,V = f(v, w, u)(\alpha_h - \beta_h I), \\ H_h &= -\,\mathbf{c}\,\mathrm{grad}\,V = f(w, u, v)(\alpha_h - \beta_h I). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Attendu que u, v, w sont soumis aux inégalités (2), la fonction f a des valeurs finies dans les formules précédentes.

Tant que u satisfait à la condition

$$0 \leqq u < \omega_1,$$

les fonctions S et I restent finies; si donc les constantes α_h et β_h sont finies et déterminées, les équations (14) fourniront pour les composantes de l'intensité de champ des valeurs également finies et déterminées, en tous les points de l'espace, excepté peut-être ceux qui répondent à $u = \omega_1$. Ces derniers points appartiennent à l'aire et au contour de l'ellipse focale du système homofocal; ils sont donc intérieurs à l'ellipsoïde E_1, et par suite les formules (14) qui leur correspondent seront affectées de l'indice $h = 1$. Sous la réserve faite au sujet des constantes α_h et β_h, la condition 5° du n° 3 sera donc vérifiée pour toutes les valeurs de h supérieures à 1.

Pour $u = \omega_1$, les valeurs de S et de I deviennent infinies; la condition pour F_1, G_1, H_1 de rester finies exige donc que l'on ait

$$\beta_1 = 0. \tag{15}$$

Nous avons satisfait à toutes les conditions imposées à la fonction potentielle. Le problème que nous nous étions proposé sera donc

résolu par la formule (7), dans le cas du champ initial parallèle aux petits axes des ellipsoïdes, si nous prouvons que les équations (8) et (13) fournissent pour les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n+1}$ des valeurs finies et déterminées.

6. Avant de procéder à cette démonstration, nous ferons quelques remarques relativement aux fonctions I et S.

Il est d'abord évident que la première est positive, et croissante avec u; comme d'autre part u_h décroît quant h augmente, on a, q étant un entier positif,

$$I_h > I_{h+q} > 0.$$

Considérons maintenant la fonction S.

On trouve, en tenant compte de la formule

$$\frac{1}{2}\wp'' u = 3\wp^2 u + e_2 e_3 - e_1^2,$$

l'équation

$$\frac{dS}{du} = \frac{(\wp u - e_1)(2\wp u + e_1)}{\wp'^2 u};$$

la valeur du second membre est positive; et comme, pour $u = 0$, la fonction S s'annule, on a, pour $u > 0$,

$$S_h > S_{h+q} > 0.$$

7. Les équations (9) et (15) donnent immédiatement les valeurs de α_{n+1} et de β_1; pour déterminer les $2n$ autres constantes α et β, nous avons les $2n$ équations linéaires (8) et (13). Il s'agit de démontrer que le déterminant de ce système est toujours différent de zéro.

Pour cela, posons

$$\frac{\varepsilon_{h+1}}{\varepsilon_h} = \tau_h;$$

nous aurons les équations simultanées suivantes, aux inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n+1}$:

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta_h S_h + \alpha_h - \beta_{h+1}\tau_h S_h - \alpha_{h+1}\tau_h = 0, \\ -\beta_h I_h + \alpha_h + \beta_{h+1} I_h \quad - \alpha_{h+1} \quad = 0, \end{array} \right.$$

avec $\alpha_{n+1} = 1$, $\beta_1 = 0$, et où h prend successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Appelons D_n le déterminant de ce système, φ_m le mineur principal formé des $2m-1$ premières lignes horizontales et des $2m-1$ premières colonnes verticales de D_n, et ψ_m le résultat de la substitution, dans la dernière ligne horizontale de φ_m, de $-I_m$ à la place de S_m.

Si l'on forme le déterminant D_n et qu'on le développe suivant les éléments de la dernière colonne, on verra que

$$D_n = I_n \varphi_n + \tau_n S_n \psi_n. \tag{17}$$

Or, si l'on développe un déterminant φ_m suivant les mineurs contenus dans ses deux dernières colonnes verticales, on obtient

$$\varphi_m = (I_{m-1} + S_m)\varphi_{m-1} + \tau_{m-1}(S_{m-1} - S_m)\psi_{m-1}; \tag{18}$$

et, par la substitution précitée, qui n'affecte pas φ_{m-1} et ψ_{m-1}, on en déduit

$$\psi_m = (I_{m-1} - I_m)\varphi_{m-1} + \tau_{m-1}(S_{m-1} + I_m)\psi_{m-1}. \tag{19}$$

En tenant compte de ce que l'on a

$$\varphi_1 = \psi_1 = 1,$$

les formules (18) et (19) permettent de calculer aisément φ_n et ψ_n, en faisant parcourir à m la série de valeurs $2, 3, \ldots, n$. On obtiendra alors D_n par l'équation (17).

Les quantités ε_h, qui peuvent représenter des pouvoirs inducteurs spécifiques ou des coefficients de perméabilité magnétique, étant toujours positives, les nombres τ_h ne sont jamais négatifs. Comme d'autre part nous avons observé que les grandeurs I_h, S_h, $I_{m-1} - I_m$, $S_{m-1} - S_m$, sont constamment positives, et qu'il en est de même de φ_1 et de ψ_1, les valeurs que les formules récurrentes (18) et (19) fournissent pour φ_n et ψ_n ne sont jamais négatives ni nulles. Par conséquent, le déterminant D_n ne s'évanouit pas, d'où il résulte que les constantes α_h et β_h sont, sans exception, finies et déterminées.

8. Si nous observons encore que l'on a

$$1 = \frac{\eta_1 - \zeta(u + \omega_1) - e_1 u}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$

la solution du problème de Barlow sera, pour le cas envisagé, contenue dans les formules

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} V_1 = \alpha_1 A x, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ V_h = A x \left\{ \alpha_h - \dfrac{\beta_h}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [\eta_1 - \zeta(u + \omega_1) - e_1 u] \right\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_{n+1} = A x \left\{ 1 - \dfrac{\beta_{n+1}}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [\eta_1 - \zeta(u + \omega_1) - e_1 u] \right\}, \end{array}\right.$$

qui déterminent la fonction potentielle du champ final dans les différents milieux, les constantes α et β étant déterminées par le système (16), et le point potentié par ses coordonnées elliptiques u, v, w. Si l'on veut exprimer x en fonction uniforme de ces coordonnées, on aura recours à la relation

$$x = e^{-\eta_1 \omega_1} \sigma^2 \omega_1' \frac{\sigma_1 u \, \sigma_1 v \, \sigma_1 w}{\sigma u \, \sigma v \, \sigma w}.$$

Les composantes de l'intensité de champ suivant les directions des vecteurs **a**, **b**, **c** sont données par le système (14). Il résulte de la première équation de ce système, que la densité de la couche électrique ou magnétique fictive, due à la polarisation des milieux, est, sur l'ellipsoïde E_h, égale à

$$\frac{\beta_{h+1} - \beta_h}{2\pi p' u_h} f(u_h, v, w).$$

9. On peut traiter de la même manière les cas où le champ initial est parallèle aux axes moyens, Oy, ou aux grands axes, Oz, du système homofocal. Dans le premier de ces cas, on obtiendra

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} V_1 = \alpha_1 A y, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ V_h = A y \left\{ \alpha_h - \dfrac{\beta_h}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\eta_3 - \zeta(u + \omega_3) - e_3 u] \right\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ V_{n+1} = A y \left\{ 1 - \dfrac{\beta_{n+1}}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\eta_3 - \zeta(u + \omega_3) - e_3 u] \right\}; \end{array}\right.$$

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n+1}$ étant déterminées par

le système (16), dans lequel I_h représente maintenant l'intégrale

$$\int_0^{u_h} \frac{du}{pu - e_3} = \frac{\eta_3 - \zeta(u_h + \omega_3) - e_3 u_h}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}.$$

Si le champ initial est parallèle aux grands axes des ellipsoïdes donnés, on trouve pour la fonction potentielle les formules suivantes :

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} V_1 = \alpha_1 A z, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ V_h = A z \left\{ \alpha_h - \dfrac{\beta_h}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} [\eta_2 - \zeta(u + \omega_2) - e_2 u] \right\}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ V_{n+1} = A z \left\{ 1 - \dfrac{\beta_{n+1}}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} [\eta_2 - \zeta(u + \omega_2) - e_2 u] \right\}; \end{array}\right.$$

les constantes sont déterminées par les équations (16), dans lesquelles I_h désigne l'intégrale

$$\int_0^{u_h} \frac{du}{pu - e_2} = \frac{\eta_2 - \zeta(u_h + \omega_2) - e_2 u_h}{(e_1 - e_2)(e_3 - e_2)}.$$

Dans ces deux cas, les intégrales I restent finies pour $u = \omega_1$: mais, comme S devient infinie pour cette valeur de u, la composante normale de l'intensité de champ deviendrait infinie si l'on n'avait $\beta_1 = 0$; c'est pourquoi l'équation (15) subsiste.

On peut remarquer que les systèmes (20), (21) et (22) se déduisent l'un de l'autre par des permutations circulaires effectuées d'une part sur les lettres x, y, z, et d'autre part sur les indices 1, 3, 2 dont les signes de Weierstrass sont affectés.

10. Cette symétrie parfaite des formules disparaît quand on se sert des fonctions de Jacobi et de Legendre, que nous allons maintenant introduire. Posons

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}, \qquad g = \sqrt{e_1 - e_2} = \sqrt{c^2 - a^2}. \qquad k'^2 = 1 - k^2.$$

De la formule

$$\mathrm{sn}^2(gu) = \frac{g^2}{pu - e_2}$$

il suit, eu égard à (5),

$$\operatorname{sn}(gu) = \frac{g}{c}. \tag{23}$$

Supposons que a, b, c désignent les demi-axes de l'ellipsoïde $u =$ const., tracé par le point potentié. Si nous posons

$$\sin\theta = \frac{g}{c}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{c}, \tag{24}$$

il vient, grâce à la relation (23),

$$u = \frac{1}{g} \mathrm{F}(k, \theta), \tag{25}$$

et l'on obtiendra immédiatement la valeur de u au moyen des tables de Legendre. Il en sera de même pour les valeurs u_h de ce paramètre sur les surfaces de séparation des différents diélectriques, à condition de poser

$$\sin\theta_h = \frac{g}{c_h}, \qquad \cos\theta_h = \frac{a_h}{c_h}, \tag{26}$$

et d'affecter de l'indice h les symboles u et θ de l'équation (25).

Examinons les trois cas qui ont conduit aux formules (20), (21) et (22). On se servira des relations

$$\left\{\begin{aligned} \zeta(u + \omega_s) &= \zeta u + \eta_s + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'u}{\mathrm{p}u - e_s} \qquad (s = 1, 2, 3), \\ g\,\mathrm{E}(k, \theta) &= \zeta u + e_1 u + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'u}{\mathrm{p}u - e_2} \end{aligned}\right. \tag{27}$$

de la dernière équation (5) et de l'équation (25). On trouve, dans le cas où le champ initial est parallèle aux petits axes $2a$ des ellipsoïdes homofocaux, c'est-à-dire où l'on a $s = 1$ dans la première formule (27),

$$\mathrm{I} = \frac{1}{g^2 k'^2}\left[\frac{b}{ac} - \frac{1}{g}\mathrm{E}(k, \theta)\right].$$

Il vient donc

$$\mathrm{I}_h = \frac{1}{g^2 k'^2}\left[\frac{b_h}{a_h c_h} - \frac{1}{g}\mathrm{E}(k, \theta_h)\right], \tag{28}$$

et l'on a d'ailleurs

$$\mathrm{p}' u_h = -2 a_h b_h c_h. \tag{29}$$

Ces deux dernières formules permettent de calculer les constantes α_h et β_h au moyen du système (16), et l'on aura, pour déterminer la fonction potentielle, la formule

$$(30) \qquad V_h = Ax\left\{\alpha_h - \frac{\beta_h}{g^2 k'^2}\left[\frac{b}{ac} - \frac{1}{g}E(k, \theta)\right]\right\},$$

dans laquelle h prend successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n+1$, et où l'on a $\alpha_{n+1} = 1$, $\beta_1 = 0$.

Pour effectuer les calculs numériques, on commencera par déduire les constantes k, k', g des paramètres caractéristiques du système homofocal donné; on cherchera θ_h au moyen des relations (26), I_h par le secours des tables de Legendre, et $p'u_h$ par (29); le système (16) fournira alors les valeurs des α et des β. On calculera ensuite les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde homofocal mené par le point potentié, et l'on déterminera l'angle θ par les formules (24). L'équation (30), écrite avec l'indice qui convient au milieu dans lequel le point précité se trouve, fera alors connaître le niveau potentiel du champ final en ce point.

11. Si le champ initial est parallèle à l'axe moyen des ellipsoïdes homofocaux, on obtient de même, en faisant $s = 3$ dans la première relation (27),

$$(31) \qquad V_h = Ay\left\{\alpha_h - \frac{\beta_h}{g^3 k^2 k'^2}\left[E(k, \theta) - k'^2 F(k, \theta) - \frac{k^2 ga}{bc}\right]\right\},$$

encore avec $\alpha_{n+1} = 1$, $\beta_1 = 0$, $h = 1, 2, \ldots, n+1$. Pour déterminer les constantes α et β au moyen du système (16), on a ici, au lieu de (28), les équations

$$I_h = \frac{1}{g^3 k^2 k'^2}\left[E(k, \theta_h) - k'^2 F(k, \theta_h) - \frac{k^2 g a_h}{b_h c_h}\right],$$

tandis que les égalités (29) subsistent.

Le coefficient de $-\beta_h$ dans la formule (31) peut aussi s'écrire

$$I = \frac{2}{g^3}\frac{\partial F(k, \theta)}{\partial(k^2)}.$$

Enfin, dans le cas où le champ initial est parallèle aux grands axes des ellipsoïdes donnés, on fera $s = 2$ dans la première équa-

tion (27), et l'on obtiendra

$$(32)\qquad V_h = A z \left\{ \alpha_h - \frac{\beta_h}{g^3 k^2} [F(k, \theta) - E(k, \theta)] \right\},$$

avec les mêmes valeurs que ci-dessus pour α_{n+1} et β_1. Les constantes α et β se calculent par le système (16), en y faisant

$$I_h = \frac{1}{g^3 k^2} [F(k, \theta_h) - E(k, \theta_h)],$$

et en donnant encore à $p' u_h$ la valeur (29).

On peut mettre le coefficient de $-\beta_h$, dans la formule (32), sous la forme

$$I = -\frac{2}{g^3} \frac{\partial E(k, \theta)}{\partial (k^2)}.$$

12. Les formules qui précèdent conduisent immédiatement aux relations connues pour le cas de deux ou de trois milieux diélectriques ou magnétiques.

Dans le cas de deux milieux ($n = 1$), on a, si le champ initial est parallèle au petit axe de l'ellipsoïde donné,

$$V_1 = \alpha_1 A x,$$
$$V_2 = A x \left\{ 1 - \frac{\beta_2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [\eta_1 - \zeta(u + \omega_1) - e_1 u] \right\}.$$

Les constantes α_1 et β_2 sont déterminées par les équations suivantes, où nous employons les intégrales de Legendre :

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1} = 1 + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \dfrac{a_1 b_1 c_1}{b_1^2 - a_1^2} \left[\dfrac{b_1}{a_1 c_1} - \dfrac{1}{g} E(k, \theta_1) \right], \\ \dfrac{1}{\beta_2} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \dfrac{1}{a_1 b_1 c_1} + \dfrac{1}{b_1^2 - a_1^2} \left[\dfrac{b_1}{a_1 c_1} - \dfrac{1}{g} E(k, \theta_1) \right]. \end{cases}$$

La fonction potentielle du champ propre de l'ellipsoïde polarisé sera, à l'intérieur de cet ellipsoïde,

$$(34)\qquad V'_1 = (\alpha_1 - 1) A x,$$

et, à l'extérieur,

$$(35)\qquad V'_2 = \frac{\beta_2 A x}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [\zeta(u + \omega_1) + e_1 u - \eta_1];$$

ce sont les formules connues définissant le champ d'un ellipsoïde polarisé uniformément et parallèlement à son petit axe.

La formule (34) concorde avec les relations établies par Poisson et Maxwell [1]. En effet, s'il s'agit d'un ellipsoïde de perméabilité μ, introduit dans un champ magnétique régnant dans le vide, l'intensité d'aimantation qu'il prendra sera

$$N = -\frac{\mu - 1}{4\pi}\alpha_1 A,$$

et la formule (34) donne, pour l'intensité du champ à l'intérieur de l'ellipsoïde, la valeur

$$H = -(\alpha_1 - 1)A = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}\,\frac{4\pi N}{\mu - 1}.$$

Mais nous avons posé

$$u_1 = \frac{1}{g}F(k, \theta_1),$$

valeur que nous pouvons mettre sous la forme

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(z + a_1^2)(z + b_1^2)(z + c_1^2)}};$$

la quantité $2u_1$ est donc l'intégrale que Maxwell désigne par Φ_0. Or, nous avons

$$\frac{\partial(2u_1)}{\partial(a_1^2)} = \frac{1}{b_1^2 - a_1^2}\left[\frac{1}{g}E(k, \theta_1) - \frac{b_1}{a_1 c_1}\right];$$

par suite, en vertu de la première égalité (33),

$$\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}a_1 b_1 c_1 \frac{\partial(2u_1)}{\partial(a_1^2)};$$

il vient donc, avec la notation de Maxwell, en observant que $\varepsilon_1 = \mu$ et $\varepsilon_2 = 1$,

$$H = 4\pi a_1 b_1 c_1 \frac{\partial\Phi_0}{\partial(a_1^2)}N,$$

résultat qui concorde avec l'équation (5) de cet auteur.

La fonction potentielle du champ d'un ellipsoïde polarisé paral-

---

[1] J. Clerk Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme* (traduction française de G. Séligmann-Lui), t. II, Paris 1889, n° 437, p. 72 et suiv.

lèlement à l'axe moyen ou au grand axe se déduit des formules (34) et (35) par les permutations tournantes indiquées plus haut (n° 9). La formule (35), ainsi que ses analogues, a été déduite par M. E. Mathy [1] des équations qu'il a établies en signes de Weierstrass pour l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur [2].

On traite le cas d'un ellipsoïde conducteur, isolé et sans charge, placé dans un champ électrostatique, en faisant $\varepsilon_1 = \infty$ dans les relations précédentes, et l'on retrouve ainsi des résultats bien connus.

13. Pour terminer, nous signalerons la forme que prennent les formules générales quand les ellipsoïdes homofocaux sont des figures de révolution. C'est un cas de dégénérescence des fonctions elliptiques et des autres fonctions introduites dans nos calculs.

En désignant par e_h l'excentricité numérique de l'ellipse méridienne de l'ellipsoïde E_h, par e celle de l'ellipse méridienne de l'ellipsoïde homofocal mené par le point potentié, on a

$$g = c_h e_h = ce.$$

Quatre cas sont à distinguer :

1° *Ellipsoïdes aplatis, champ inducteur parallèle à l'axe de révolution.* — Les constantes α et β se calculent au moyen des quantités

$$\beta' u_h = -2 a_h c_h^2, \qquad I_h = \frac{1}{g^3}\left(\frac{e_h}{\sqrt{1-e_h^2}} - \arcsin e_h\right),$$

et il vient

$$V_h = Ax\left[\alpha_h - \frac{\beta_h}{g^3}\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} - \arcsin e\right)\right].$$

2° *Ellipsoïdes aplatis, champ inducteur perpendiculaire à*

---

(1) *Composantes de la force magnétique d'un aimant ellipsoïdal uniforme* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. III, 1907, p. 207).

(2) E. Mathy, *Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions* θ *et* ζ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. II, 1896, p. 312 et 314).

l'axe de révolution. — Ici on a

$$p' u_h = -2 a_h c_h^2, \qquad I_h = \frac{1}{2 g^3}\left(\arcsin e_h - e_h \sqrt{1 - e_h^2}\right).$$

$$V_h = A z \left[\alpha_h - \frac{\beta_h}{2 g^3}\left(\arcsin e - e\sqrt{1 - e^2}\right)\right].$$

3° *Ellipsoïdes allongés, champ inducteur parallèle à l'axe de révolution.* — On obtient

$$p' u_h = -2 a_h^2 c_h, \qquad I_h = \frac{1}{g^3}\left(\ln \sqrt{\frac{1 + e_h}{1 - e_h}} - e_h\right),$$

$$V_h = A z \left[\alpha_h - \frac{\beta_h}{g^3}\left(\ln \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} - e\right)\right].$$

4° *Ellipsoïdes allongés, champ inducteur perpendiculaire à l'axe de révolution.* — Dans ce cas, on trouve

$$p' u_h = -2 a_h^2 c_h, \qquad I_h = \frac{1}{2 g^3}\left(\frac{e_h}{1 - e_h^2} + \ln \sqrt{\frac{1 - e_h}{1 + e_h}}\right),$$

$$V_h = A x \left[\alpha_h - \frac{\beta_h}{2 g^3}\left(\frac{e}{1 - e^2} + \ln \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\right)\right].$$

Enfin, lorsque les ellipsoïdes donnés dégénèrent en un système de sphères concentriques, on trouve les équations suivantes, qui conduisent, en particulier, à la solution du problème de Barlow sous sa forme classique :

$$I_h = \frac{1}{3 a_h^3}, \qquad S_h = \frac{2}{3 a_h^3},$$

$$V_h = A x \left(\alpha_h - \frac{\beta_h}{3 a^3}\right).$$

Toutes les formules précédentes supposent $\alpha_{n+1} = 1$ et $\beta_1 = 0$.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEVEUGLE (R.). — Précis de Calcul géométrique. Avec une *Préface* de M. H. Fehr, 1 vol. gr. in-8, LVI-400 pages et 66 figures, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920.

Les Ouvrages quelque peu modernes sur le Calcul vectoriel n'étaient guère jusqu'ici, en France, que des traductions d'ouvrages étrangers. Telles sont la traduction de Burali-Forti, faite par S. Lattès, et celle de Coffin, faite par A. Véronnet.

Plus lointainement, il conviendrait de citer une traduction de Bellavitis faite par C.-A. Laisant et, chose plus remarquable encore, une *Théorie des Quaternions* due au même et regretté géomètre. De telles publications, tout en ayant conservé bonne renommée, sont ensevelies dans l'oubli matériel en ce sens que ceux qui peuvent y avoir effectivement recours doivent être bien rares, les éditions étant épuisées depuis longtemps.

Voici une œuvre moderne et essentiellement française; elle est si riche en problèmes et exemples qu'on peut, au premier abord, la trouver d'analyse bibliographique difficile; mais, quand on s'est proposé de la parcourir soigneusement, on y discerne des idées directrices particulièrement heureuses et bien choisies. H. Grassmann et Sir W. Hamilton sont les créateurs plus particulièrement invoqués; le premier avait surtout en vue la Géométrie; le second, la Physique et, ces sciences se dirigeant aujourd'hui et plus que jamais l'une vers l'autre, on voit les beaux thèmes que M. Leveugle avait à développer pour expliquer l'allure moderne de la Physique mathématique.

L'*Ausdehnungslehre* de Grassmann a été réclamée par des analystes purs, notamment par MM. Goursat et Cartan, qui ont déclaré la prolonger en leurs études sur les intégrales multiples; l'analyse vectorielle et les quaternions d'Hamilton, avec leur allure si semblable à celle des déterminants, s'imposent de plus en plus dans l'électromagnétisme et la gravifique appuyés précisément

sur la théorie des formes intégrales, parce qu'il y a, au fond de tout ceci, des invariants intégraux dont l'analyse est celle des déterminants fonctionnels. Telles sont, il me semble, les idées fondamentales dont on pourra se pénétrer élémentairement en lisant l'œuvre du colonel Leveugle.

Le détail est plus malaisé à peindre brièvement. Le Livre débute avec le point, le parallélogramme et le spath ou parallélépipède oblique. C'est la comparaison des spaths, que l'on peut attacher à des points, qui permet un premier calcul direct avec ces points; celui-ci donne alors tout naturellement le calcul barycentrique de Möbius.

Bientôt nous trouvons le vecteur non localisé, puis le bipoint ou vecteur glissant et le tripoint qui correspond aussi à l'idée d'aire triangulaire glissant sur son propre plan.

Avec la multiplication combinatoire ou alternée, les analogies se rapportant aux déterminants commencent à apparaître; une interversion de facteurs change le signe du produit et celui-ci ne change pas si, à la valeur de l'un des facteurs, on ajoute un multiple quelconque d'un autre facteur. Cette analogie se prolonge dans le bipoint pour lequel on a

$$AB = -BA, \qquad AA = 0.$$

Le produit *scalaire* de deux vecteurs est analogue au travail par rapport à la force et au déplacement, mais il y a aussi un produit *vectoriel* admettant un *complément* spatial perpendiculaire aux facteurs.

Comme premières applications suivant ces considérations, citons le passage des coordonnées barycentriques aux coordonnées pluckériennes de la droite et surtout la géométrie projective avec ses coniques, indifféremment considérées comme courbes du second degré ou de la seconde classe, ainsi qu'avec ses quadriques réglées. Le calcul est celui de formes algébriques toujours en relation immédiate avec les figures.

C'est encore, et tout naturellement, à la notion de produit qu'est rattachée la notion de *quaternion*. Seulement, nous sommes ici en présence de facteurs fondamentaux i, j, k, tels que i^2, j^2, k^2 soient égaux à -1 et non à zéro. Un produit vectoriel, formé dans ces conditions, comprend une partie scalaire et une partie vecto-

rielle proprement dite, aisée d'ailleurs à mettre sous forme d'un déterminant; l'assemblage constitue le quaternion. Il est rapidement homologué avec la forme exponentielle des imaginaires et admet une image sphérique très simple. Ses applications à la Géométrie et à la Mécanique sont intuitives; le plan, la sphère, l'inversion sont d'une étude immédiate; il en est de même pour les symétries, le théorème d'Halphen sur la composition des déplacements hélicoïdaux, le mouvement central d'un point. Voici les courbes gauches avec le trièdre mobile, les formules de Frenet, la courbure des surfaces, toutes choses directement inspirées de Grassmann ainsi que M. H. Fehr l'avait déjà montré dans sa Thèse (Georg et Cie, Genève, 2e édition, 1907).

Nous passons ensuite à l'étude des fonctions vectorielles *linéaires*, c'est-à-dire telles que

$$\varphi(C_1 + C_2) = \varphi C_1 + \varphi C_2.$$

Une telle construction n'a de sens que par l'intervention d'une multiplication nouvelle dite *dyadique*, d'où des *dyades* dont l'assemblage donne des *formes dyadiques*. Une transformation linéaire ordinaire revient à la multiplication d'un certain vecteur par une certaine dyadique et nous voilà encore, par une voie nouvelle, dans les plus harmonieuses combinaisons de déterminants et, de même, dans les propriétés les plus générales des quadriques.

La Physique moderne, celle des Lorentz, Einstein, etc., fait un usage courant d'expressions linéaires, ou en forme de déterminant, mais dépendant d'opérateurs de dérivation. Tel est, par exemple, le *Nabla* d'Hamilton

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z},$$

d'où le *gradient* ∇u. Le ∇ d'un vecteur d'espace peut prendre la forme quaternionienne

$$-\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

d'où la *divergence*, le *curl*, le *rotor* et toutes les transformations d'intégrales multiples (formules de Stokes, de Green, etc.) remar-

quables, au premier chef, précisément parce que ces transformations ont toujours eu un sens physique et que celui-ci, à l'heure actuelle, s'accuse de plus en plus en se généralisant.

M. R. Levengle a d'ailleurs terminé son beau Livre par d'élégants emprunts à la théorie du potentiel newtonien, à celle du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, à l'élasticité qui conduit naturellement à la théorie ondulatoire de la lumière et finalement à sa théorie électromagnétique.

Que de belles choses, que d'élégants problèmes (particulièrement dans le domaine de la géométrie synthétique) nous avons dû passer sous silence! Heureusement, les nombreux lecteurs que trouveront ces belles pages sauront aisément profiter de tout l'ensemble.

La Préface de M. H. Fehr nous rappelle, d'une part, les contributions à la Géométrie vectorielle qui sont dues à l'éminent doyen de la Faculté des Sciences de Genève; d'autre part, l'inlassable dévouement montré par celui-ci pendant toute la guerre envers les internés en territoire suisse, leur permettant de reprendre contact avec leurs familles et leurs études. Le présent livre ne pouvait être présenté sous de meilleurs auspices, tant au point de vue scientifique qu'au point de vue moral.

A. Buhl.

OPPERMANN (A.). — Premiers éléments d'une théorie du quadrilatère complet. 1 vol. gr. in-8, 76 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1919.

Pour apprécier, comme il le mérite, ce petit Livre, il faut, l'intérêt du sujet étant assez restreint, envisager les services qu'il peut rendre dans l'enseignement de la Géométrie. Le caractère élémentaire des méthodes utilisées, la rigueur, la précision et la clarté de l'exposition permettent de recommander l'étude de cet Ouvrage aux élèves des classes supérieures de nos Lycées. Il sera pour eux, par sa forme monographique, plus attrayant qu'un ordinaire recueil d'exercices, et sa valeur éducative n'est pas moindre : la variété des méthodes mises en œuvre et des connaissances appliquées l'assure. Le Livre est complété par une annexe bibliographique, avec d'excellentes analyses des Mémoires cités.

Nous donnerons pour terminer quelques indications sur les questions traitées. Après avoir rappelé les propriétés les plus élémentaires et indiqué la classification des quadrilatères complets, l'auteur étudie les faisceaux conjugués définis respectivement par les cercles conjugués des quatre triangles et les cercles construits sur les trois diagonales; il établit ensuite les propriétés relatives aux médianes et aux bissectrices; enfin, après d'intéressantes applications de l'étude de la parabole inscrite, il indique les relations entre les faisceaux de cercles précédents, les systèmes de trois cercles ayant pour centres d'homothétie les sommets du quadrilatère et les cercles de Monge des coniques inscrites.

JOSEPH PÉRÈS.

RIGNANO (E.). — PSYCHOLOGIE DU RAISONNEMENT. *Édition française*, 1 vol. in-8, XI-547 pages. Paris, Alcan, 1920.

Le raisonnement rend au savant des services tout à fait analogues à ceux que la machine prête à l'ouvrier; il opère en effet sur les données de l'expériences (et tout le monde sait que l'expérience n'est étrangère à aucune science, pas même aux mathématiques pures), en les métamorphosant graduellement d'une façon non moins régulière et radicale que le fait l'outil pour les matériaux industriels. En conséquence, la connaissance de la nature et de la structure du raisonnement ne doit pas être considérée comme étrangère à la préparation du savant, de la même manière qu'un ouvrier intelligent ne peut pas ignorer la composition des machines qu'il emploie.

Toutefois, combien petit est le nombre des investigateurs connaissant les armes qu'ils utilisent dans leurs luttes de chaque jour contre l'ignorance ou l'erreur! Au contraire, combien grand est le nombre d'entre eux qui affectent un mépris réellement injustifié pour la logique théorique (le code du raisonnement), en citant, pour justifier ce sentiment, les erreurs grossières commises précisément par des personnes auxquelles on doit des règles classiques pour la découverte de la vérité! Je n'essayerai pas de convaincre ces personnes que, en agissant de la sorte, elles se mettent du côté du tort; je me borne à affirmer, sans crainte de démenti, que

toute recherche, ayant pour but d'éclaircir l'essence et le fonctionnement du raisonnement, doit être considérée par tout mathématicien vraiment digne de ce nom, comme faisant partie de l'ensemble de ses occupations et que la connaissance des résultats d'une telle recherche ne peut que lui être extrêmement utile. Cette opinion, que nous avons depuis nombre d'années, est devenue plus vigoureuse et plus justifiée une fois la lecture finie de l'important volume que nous annonçons, et qui est dû à la plume savante du directeur de *Scientia*, la revue si favorablement connue dans les milieux scientifiques des deux mondes.

Personne ne doit s'étonner que, pour faire un peu de lumière sur la psychologie du raisonnement, l'auteur ait employé presque 600 pages grand in-8. D'abord il s'agit de questions d'une délicatesse et d'une difficulté comparables à celles qui se rencontrent dans les théories les plus élevées de l'Analyse mathématique; il s'agit, ensuite, de questions qui depuis un siècle ont été l'objet de recherches très sérieuses et qui ont donné naissance à des discussions, savantes autant qu'opiniâtres, que notre auteur rapporte en les examinant de son point de vue; il s'agit, enfin, de questions reliées à un nombre considérable de phénomènes ayant trait aux fonctions les plus nobles de l'entendement humain; et, pour s'assurer la victoire sur ces obscurs problèmes, il faut bien souvent, non seulement laisser de côté l'homme, mais descendre jusqu'aux derniers anneaux de la chaîne des êtres vivants; de même que, d'ailleurs, il est extrêmement utile d'examiner les phénomènes qui accompagnent le sommeil de l'homme sain ou les manifestations de l'âme meurtrie des aliénés.

L'auteur, ayant voulu considérer son thème dans toute son ampleur et dans tous ses détails (et, de cette décision, il faut se féliciter, car, en conséquence, il a été amené à écrire un véritable traité complet de psychologie), a été obligé de commencer par l'étude de l'origine des sentiments de tout être animé; de cette manière, il a été amené à la conclusion que le motif dominant tous les phénomènes offerts par la matière vivante est l'aspiration de tout être de revenir à l'état considéré comme normal; de ces prémices découle que la mémoire se trouve au fond de toute action des êtres vivants. En montant plus haut dans l'échelle animale, M. Rignano étudie, dans deux longs Chapitres, le phénomène de

l'*attention* et traite ensuite la question fondamentale : *Qu'est-ce que le raisonnement?* il y répond en montrant que c'est une suite d'opérations et d'expériences *seulement pensées*. Pour justifier cette opinion, je vais rapporter un exemple assez curieux qu'il a donné : il s'agit de prouver qu'il y a sans doute à Londres deux personnes ayant le même nombre de cheveux; c'est une conséquence du fait que le nombre des habitants de cette immense métropole est plus grand que le nombre de cheveux qui ornent la tête la mieux fournie. Or, si l'on expose tout au long ce raisonnement, on voit qu'il comprend ces opérations : 1° détermination du nombre de cheveux de chaque personne habitant à l'ombre de la tour de Saint-Paul; 2° rangement de ces personnes dans l'ordre déterminé par la suite des nombres trouvés; 3° constatation que dans la série résultante il y a certainement des éléments doubles. Or, pour toucher le but, il n'est pas du tout nécessaire d'exécuter matériellement ces pénibles opérations; il suffit de reconnaître que cela est possible; dès lors, le discours marche sur des roulettes; et la même chose arrive dans tout cas analogue, comme il est facile de le voir à l'aide des nombreux exemples que M. Rignano a cherchés et trouvés dans les sciences les plus différentes.

Naturellement, le raisonnement ne s'est pas arrêté à ces formes élémentaires; il a suivi (peut-être précédé et préparé) l'évolution de la Science; de concret il est devenu abstrait, l'intuition a cédé sa place à la déduction rigoureuse : ce sont des faits, d'une importance hors ligne pour le progrès de nos connaissances, sur lesquels notre auteur a écrit deux Chapitres bien nourris que nous signalons à l'attention de nos lecteurs. En continuant son évolution, la technique du raisonnement, particulièrement sous l'influence des triomphes des mathématiques, s'est encore perfectionnée et, avec un élan étonnant, a atteint des hauteurs prodigieuses; à ces phases ultérieures de la vie du raisonnement, l'auteur — qui parle des mathématiques en connaisseur parfait — a consacré trois longs Chapitres qui, si nous ne nous trompons pas, seront ceux auxquels les lecteurs du *Bulletin* s'intéresseront sans exception, car on y parle exclusivement de formes de raisonnement qui sont employées dans les mathématiques; je n'essayerai pas d'en présenter un résumé, de crainte de les gâter; je me permets seulement de citer les développements relatifs à la

Logique mathématique, pour remarquer que M. Rignano est envers cette branche du savoir humain, d'une sévérité peut-être outrée, car même si, jusqu'à présent, elle n'a pas mené à quelque grande découverte, il ne faut pas oublier qu'il s'agit de procédés récents, employés par un nombre très restreint de savants; et, d'ailleurs, si cette méthode est un tour logique qui rend impossible l'emploi non déclaré de nouveaux principes (postulats), c'est bien quelque chose qui mérite l'approbation de la part des théoriciens du raisonnement.

Le raisonnement dont nous avons parlé jusqu'à ce moment mérite l'épithète de *pur* ou *naïf*, car on ne l'emploie que dans le but de chercher la vérité, sans se préoccuper de la nature des résultats auxquels on parvient. Mais la logique a été et est encore employée *ad probandum* une thèse à laquelle on veut parvenir coûte que coûte. C'est le raisonnement *intentionnel*, dont M. Rignano parle dans les Chapitres X et XI de son Ouvrage; de nos jours, il est employé par les avocats dans leurs plaidoyers, tandis que, dans les siècles passés, il a servi aux métaphysiciens grands et petits. Des personnalités rangées dans ces deux classes, les plus intéressantes sont, sans doute, les dernières, car M. Rignano place dans leurs rangs des hommes tels que Descartes et Pascal.

Les savants présentent des caractères intellectuels bien différents lorsqu'on les considère au moment où ils marchent à la conquête de la vérité : il y a des synthétiques et des analytiques, des intuitifs et des logiques, des romantiques et des classiques, des audacieux et des timides, des visuels et des auditifs, des positivistes et des métaphysiciens; quoique ces classifications, comme toutes celles qui se rapportent au mécanisme de l'intelligence, ne soient pas du tout absolues, car un penseur dans des circonstances différentes agit différemment, toutefois, il est nécessaire de les connaître et notre auteur a été bien inspiré en y consacrant un Chapitre qui, s'approchant plus que les autres de l'homme vivant, réussit à être un des plus intéressants de son Ouvrage. Il se tourne ensuite vers la Pathologie du raisonnement, en traitant d'abord des rêves et ensuite des différentes formes de folie, naturellement par rapport au sujet de son choix. Il revient après à la Physiologie, pour s'entretenir sur la distinction fondamentale

qu'on peut faire entre raisonnement conscient et raisonnement inconscient, en s'efforçant, avec raison, d'amoindrir, autant que faire se peut, la valeur que quelques auteurs ont cru pouvoir attribuer aux actes inconscients.

L'auteur clôt son Livre par quelques considérations philosophiques ayant pour but d'établir les rapports existant entre le raisonnement et le finalisme de la vie, en faisant remarquer le contraste tragique qui existe entre notre vie, toute inspirée par le finalisme du bonheur, et le monde extérieur, qui n'a ni ne peut avoir aucune finalité; sur ces remarques si élevées il ne nous est pas permis de nous arrêter, car elles sont tout à fait étrangères au programme du *Bulletin* et aussi pour ne pas provoquer, de la part du lecteur, la sévère semonce : *Ne sutor ultra crepidam.*

GINO LORIA.

MÉLANGES.

SUR L'ÉVANOUISSEMENT D'UNE BRANCHE DE FONCTION UNIFORME AUX POINTS D'UNE LIGNE SINGULIÈRE;

PAR M. P. FATOU.

On sait qu'une branche de fonction analytique, holomorphe dans un domaine D, ne peut pas y prendre la valeur zéro en une infinité de points ayant au moins un point limite intérieur à D, à moins d'être nulle dans tout son domaine d'existence; les zéros de la fonction dans le domaine D sont alors (en laissant de côté la fonction identiquement nulle) en nombre fini ou en infinité dénombrable, leurs points limites dans ce dernier cas appartenant à la frontière de D. Jusqu'à quel point cette propriété s'étend-elle à l'ensemble des valeurs d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière? Cette question a été souvent controversée. M. Painlevé, dans son Mémoire sur les lignes singulières

des fonctions analytiques (*Annales de Toulouse*, 1888), a démontré le résultat suivant : « Étant donné un arc de courbe rectifiable C, et une fonction analytique définie et régulière d'un côté de C, continue sur C et prenant la valeur zéro en chacun de ses points, cette fonction est identiquement nulle. » Ne peut-on pas arriver à la même conclusion avec des hypothèses moins restrictives ? En particulier, l'ensemble des zéros d'une fonction uniforme sur une ligne singulière est-il toujours dénombrable ? Nous allons voir que les progrès accomplis dans ces dernières années dans l'étude des fonctions de variable réelle et de certaines propriétés des fonctions analytiques qui sont liées à celles des fonctions discontinues d'une variable réelle, permettent de donner à ces questions une réponse à peu près définitive.

Nous supposerons tout d'abord que la fonction considérée est représentée par une série entière dont nous envisagerons les valeurs limites aux points de la circonférence du cercle de convergence; cette circonférence est en général une coupure essentielle pour la fonction, mais nous n'aurons pas à nous inquiéter de savoir, dans ce qui suit, si tous les points de la circonférence sont ou non singuliers.

Nous devons maintenant préciser ce que nous entendons par zéro de la fonction $f(z)$ ou $f(z) - \text{const.}$ sur la circonférence $C(|z| = 1)$. Soit m un point de C. A un nombre quelconque fini ou infini.

1° Nous dirons que m appartient à l'ensemble $E[f(z) = A]$ s'il existe un chemin (ligne de Jordan simple), intérieur à C et aboutissant en m, sur lequel $f(z)$ tend vers la valeur limite A.

2° Nous dirons que m appartient à l'ensemble $e[f(z) = A]$ s'il en est encore ainsi avec cette restriction que le chemin considéré est le rayon Om.

3° Nous dirons que m appartient à l'ensemble $\varepsilon[f(z) = A]$ si $f(z)$ prend la valeur limite A sur tous les chemins qui aboutissent en m, qui sera alors un point de continuité de la fonction.

Tels sont les trois points de vue auxquels il semble le plus naturel de se placer pour définir les zéros de $f(z) - A$. Il est évident qu'en général, à cause de l'indétermination de $f(z)$ sur C, les ensembles E, e, ε ne sont pas identiques, et que d'autre part

on a symboliquement

$$E \geqq e \geqq \varepsilon.$$

Toutefois, dans des cas étendus, on peut affirmer que $E = e$. Il suffit pour cela que $f(z)$ soit bornée ou possède seulement deux valeurs exceptionnelles à l'intérieur de C. C'est ce qui résulte d'un important théorème de MM. Lindelöf et Montel (¹), d'après lequel l'existence de la valeur limite A sur un chemin quelconque aboutissant en m entraîne alors l'existence de cette même valeur limite sur tout chemin faisant un angle $< \frac{\pi}{2}$ avec le rayon. Quant à l'ensemble ε, il sera généralement plus restreint que les deux précédents, à moins que $f(z)$ ne soit continue sur C.

Ceci posé, nous allons examiner quels sont, dans tous les cas possibles, les propriétés des ensembles E, e, ε.

Tout d'abord, les ensembles E, e, et même l'ensemble ε, ne sont pas nécessairement dénombrables. J'ai montré en effet, dans ma Thèse (²), que si l'on se donne arbitrairement sur C un ensemble fermé et de mesure nulle ε, il est possible de former une fonction holomorphe et bornée dans C, continue sur C et prenant la valeur zéro en tous les points de ε. Si l'on renonce à la continuité en tous les points de C, on forme aisément, par application de la méthode de condensation des singularités, un exemple analogue où l'ensemble $\varepsilon[f(z) = 0]$ est non dénombrable dans tout intervalle, $f(z)$ étant ponctuellement discontinue sur C, mais continue en tous les points de ε.

Dans tous ces exemples, ε est de mesure nulle. En est-il nécessairement toujours ainsi ? J'ai seulement démontré, dans ma Thèse, que si $f(z)$ est holomorphe et bornée à l'intérieur de C, le complémentaire de l'ensemble $e[f(z) = 0]$ est de mesure non nulle dans tout intervalle. Il en est de même *a fortiori* pour l'ensemble $\varepsilon[f(z) = 0]$.

La démonstration du fait que l'ensemble $e[f(z) = 0]$ est tou-

---

(¹) LINDELÖF, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XLVI, 1915, p. 10). — MONTEL, *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math.*, 7e série, t. III, 1917, p. 19).

(²) P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. XXX, 1906, p. 393).

jours de mesure nulle, quand $f(z)$ est formée, a été donnée par MM. F. et M. Riesz dans une Communication faite au 4e Congrès des mathématiciens scandinaves [1]. Leur démonstration qui s'appuie sur les résultats de ma Thèse suppose établis les théorèmes de M. Lebesgue concernant l'existence des dérivées des fonctions à variation bornée. J'ai donné moi-même une démonstration beaucoup plus rapide et élémentaire dans un article qui paraîtra prochainement au *Bulletin de la Société mathématique de France*. Comme elle tient en quelques lignes, il n'y a pas d'inconvénient à la reproduire ici.

Supposons, ce qui ne diminue pas la généralité, $f(0) = 1$; en vertu d'une formule bien connue de M. Jensen, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \mathrm{R}\, d\varphi = n \log r - \log r_1 r_2 \ldots r_n = \log \frac{r}{r_1}\,\frac{r}{r_2}\cdots\frac{r}{r_n},$$

en posant

$$\mathrm{R} = |f(re^{i\varphi})|$$

et en appelant $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les modules des zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle de rayon $r\,(0 < r < 1)$. Si nous séparons, dans l'intégrale du premier membre, les éléments positifs correspondant à $\mathrm{R} > 1$ des éléments négatifs $(\mathrm{R} < 1)$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}(\mathrm{R}>1)} \log \mathrm{R}\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}(\mathrm{R}<1)} \log \frac{1}{\mathrm{R}}\, d\varphi = \log \frac{r}{r_1}\cdots - \frac{r}{r_n}$$

ou

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}(\mathrm{R}>1)} \log \mathrm{R}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}(\mathrm{R}<1)} \log \frac{1}{\mathrm{R}}\, d\varphi + \log \frac{r}{r_1}\,\frac{r}{r_2}\cdots\frac{r}{r_n}.$$

Dans cette dernière égalité ne figurent que des quantités positives. Si $f(z)$ est bornée, ou plus généralement si l'intégrale

$$\int_{|z|=\mathrm{R}} \mathrm{R}^{\alpha}\, d\varphi$$

reste bornée quand r tend vers 1 (α, nombre positif arbitraire), il en sera de même *a fortiori* du premier membre de (2). Donc les deux termes du second membre de (2) restent également bornés

---

[1] F. et M. Riesz, *Ueber die Randwerte einer Analytischen Funktion*, p. 28-30. Stockholm, 1916.

pour $r \to 1$. Or, si l'on avait

$$\lim_{r=1} |f(re^{i\varphi})| = 0$$

pour un ensemble de valeurs de φ de mesure $\mu > 0$, à tout nombre positif P correspondrait un nombre $r' < 1$ tel que, pour $r > r'$, l'inégalité

$$|f(re^{i\varphi})| < \frac{1}{e^{P}}$$

ait lieu dans un ensemble de mesure $> \frac{\mu}{2}$, et l'intégrale du second membre de (2) serait alors supérieure à

$$\frac{1}{2\pi} \times \frac{\mu P}{2} = \frac{\mu P}{\pi}.$$

Elle tendrait donc vers l'infini avec $\frac{1}{1-r}$. On a donc

$$\mu = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

[Le fait que le second terme du second membre de (2) reste borné entraîne d'autre part, comme on le voit aisément, la convergence du produit infini Πr_n, ou de la série $\Sigma(1 - r_n)$. Nous renvoyons, pour plus de détails sur ce sujet, à notre article du *Bulletin de la Société mathématique*.]

Ainsi, lorsque $f(z)$ est bornée dans C, l'ensemble $e[f(z) = A]$ est de mesure nulle, et il en est de même en vertu du théorème de M. Lindelöf, de l'ensemble $E[f(z) = A]$. Si l'on suppose seulement que l'intégrale $\int_0^{2\pi} R^\alpha d\varphi$ est bornée, le premier ensemble est encore de mesure nulle (même pour $A = \infty$); il en est probablement de même pour E, mais la chose est plus difficile à démontrer.

Remarquons d'autre part que, pour $f(z)$ bornée, les valeurs limites radiales existent *presque partout*, ainsi que je l'ai démontré dans ma Thèse; l'ensemble des valeurs distinctes ainsi obtenues est non dénombrable, puisque la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle est encore de mesure nulle.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $f(z)$ est non bornée

dans C, mais possède deux valeurs exceptionnelles finies et ne devient jamais égale, par exemple, à 0 et à 1. La propriété subsiste dans ce cas, comme on le voit en employant la méthode de démonstration de M. Picard pour les fonctions entières. Soit $\nu(x)$ la fonction qui exprime le rapport des périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}}.$$

La fonction $\nu(x)$ ayant sa partie imaginaire positive et n'admettant que les trois points critiques 0, 1 et ∞, le théorème démontré pour les fonctions bornées s'applique à la fonction

$$\varphi(z) = \nu[f(z)],$$

qui est holomorphe à l'intérieur de C et devient bornée par une transformation homographique. Soit alors A un nombre quelconque et supposons que $f(z)$ tende vers A quand z tend vers le point ζ de C suivant une ligne déterminée, mais quelconque; ζ appartient donc à l'ensemble $E[f(z) = A]$; le point $Z = f(z)$ décrivant alors une ligne aboutissant au point A, le point $T = \nu(Z) = \varphi(z)$ décrira une ligne aboutissant en un point déterminé $\nu(A)$; ceci est encore vrai quand A est égal à l'une des valeurs critiques 0, 1 ou ∞; car ces points sont, pour toutes les branches de $\nu(Z)$, des points critiques réguliers pour lesquels il n'y a pas d'indétermination; à deux points distincts ζ et ζ' de E, il pourra correspondre ainsi deux valeurs distinctes de $\nu(A)$, si les chemins décrits par Z comprennent entre eux un point critique de $\nu(Z)$; mais les valeurs distinctes $\nu^{(p)}(A)$ ainsi obtenues sont au plus en infinité dénombrable et déduites de l'une d'elles par une substitution homographique à coefficients entiers. Nous voyons ainsi que l'ensemble $E[f(z) = A]$ est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_1 + E_2 + \ldots + E_p + \ldots$ en posant $E_p = E[\varphi(z) = \nu^{(p)}(A)]$. Comme tous les E_p sont de mesure nulle, d'après ce que l'on a démontré pour les fonctions bornées, il en est de même de E.

Plaçons-nous maintenant dans le cas tout à fait général où l'on suppose seulement que $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C. Il est alors facile de démontrer que l'ensemble $\varepsilon[f(z) = A]$ est de mesure

nulle; supposons, en effet, qu'il soit de mesure $\mu > 0$; il existe alors un point ζ de C tel que, pour tout arc de la circonférence ayant pour milieu ζ, l'ensemble des points de ε qui y sont contenus soit de mesure non nulle. Pour s'en convaincre, on peut appliquer un théorème de M. Lebesgue, d'après lequel la *densité* de ε est, en certains points, égale à 1; on peut le voir aussi d'une manière tout élémentaire en divisant la circonférence en deux parties égales, choisissant celle dans laquelle la densité moyenne de ε est la plus grande, divisant de nouveau cet arc en deux parties égales et ainsi de suite; les arcs obtenus tendent vers un point limite ζ où la densité de ε est $\geqq \frac{\mu}{2\pi}$ et qui répond à la question.

Considérons le domaine δ limité par un arc mn de C ayant ζ pour milieu et une portion de circonférence de centre ζ passant par m et n; on peut faire la représentation conforme de δ sur un cercle de rayon 1 au moyen de fonctions élémentaires, de manière que les points des contours se correspondent un à un et que les ensembles de points de mesure nulle se correspondent également sur les contours. On en conclut, en appliquant ce qui a été démontré plus haut, que, B désignant un nombre quelconque distinct de A, la fonction $\frac{1}{f(z)-B}$ est non bornée dans δ puisqu'elle prend la valeur $\frac{1}{A-B}$ en un ensemble de points de mesure non nulle sur le contour. Faisant tendre ensuite la longueur de mn vers zéro, on obtiendra une suite de points $z_1, z_2, \ldots$ tendant vers ζ et intérieurs à C, tels que la suite $f(z_1), f(z_2), \ldots$ ait pour limite B; en joignant ces points deux à deux par des segments de droite, on aura une ligne $z_1 z_2 \ldots z_n \ldots$, aboutissant en ζ, sur laquelle $f(z)$ n'aura pas la valeur limite A, contrairement à l'hypothèse. Il faut en conclure que l'ensemble $\varepsilon[f(z) = A]$ est de mesure nulle.

Au contraire, les ensembles $E[f(z) = A]$ et même $e[f(z) = A]$ peuvent avoir des mesures quelconques. C'est ce que l'on peut prouver par des exemples. Dans un Mémoire sur les équations fonctionnelles, paru au *Bulletin de la Société mathématique* (1920, 3e Partie, Chap. VII), j'ai démontré que la fonction de Kœnigs qui vérifie l'équation fonctionnelle de Schröder :

$$f[R(z)] = s f(z) \qquad [s = R'(0),\ 0 < |s| < 1,\ R(0) = 0],$$

dans laquelle $R(z)$ est une fonction rationnelle définissant une substitution à cercle fondamental ($|z| \leqq 1$), jouit des propriétés suivantes : par chaque point de la circonférence $|z| = 1$, on peut mener une courbe intérieure au cercle C et faisant un angle quelconque avec la circonférence sur laquelle $f(z)$ tend vers l'infini; en outre, *presque partout*, ce chemin peut être confondu avec le rayon lui-même. On aura donc ici

$$\operatorname{mes} E[f(z) = \infty] = \operatorname{mes} e[f(z) = \infty] = 2\pi.$$

[La fonction $f(z)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs finies au voisinage de chaque point de la circonférence.]

Nous devons maintenant nous demander s'il existe des fonctions possédant des propriétés analogues; mais cette fois avec une valeur limite finie, par exemple zéro.

On parvient à construire une telle fonction en considérant un cas limite de l'équation fonctionnelle précédente, celui où la substitution à cercle fondamental admet un point double singulier de multiplicateur égal à 1, les substitutions itérées ne convergeant sur aucun arc de la circonférence; cela exige que l'on ait pour le point double α considéré (situé sur la circonférence)

$$R(\alpha) = \alpha, \qquad R'(\alpha) = 1, \qquad R''(\alpha) = 0.$$

Dans ces conditions, il existe une fonction holomorphe dans le cercle C, non continuable au delà de ce cercle, qui vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel

$$f[R(z)] = f(z) + \text{const}.$$

La fonction $F(z) = e^{f(z)}$ jouit de la propriété que tout point de la circonférence limite appartient à l'ensemble $E[F(z) = 0]$. C'est ce que nous allons maintenant démontrer. Pour arriver rapidement au but, sans obliger le lecteur à se référer au Mémoire cité, nous traiterons la question dans un cas particulier.

Nous allons d'abord étudier l'itération de la substitution

$$(3) \qquad t_1 = t + 2 + \frac{1}{t} \equiv Q(t)$$

qui laisse invariables, comme le montre un calcul élémentaire, le demi-axe réel négatif, et le domaine constitué par les points du

plan extérieurs à ce demi-axe. La substitution inverse définie par

$$t = \frac{t_1 - 2 \pm \sqrt{t_1^2 - 4t_1}}{2}$$

est uniforme pour $|t_1| > 4$.

Ceci posé, faisons l'itération de $Q(t)$ dans le domaine Δ défini par

$$(4) \qquad \tau \geqq \alpha > 4 \qquad (t = \tau + i\tau').$$

On a, d'après (3) et (4),

$$\tau_1 = \tau + 2 + \frac{\tau}{\tau^2 + \tau'^2} > \tau + 2,$$

$$\tau'_1 = \tau'\left(1 - \frac{1}{\tau^2 + \tau'^2}\right).$$

Cette dernière égalité montre que τ'_1 est du signe de τ' et moindre en valeur absolue. On aura ensuite par itération

$$(5) \qquad \tau_n > \tau + 2n \geqq \alpha + 2n > 2(n+1),$$

$$(6) \qquad |\tau'_1| > |\tau'_2| > \ldots > |\tau'_n| > \ldots,$$

ce qui montre que les points $t_n = \tau_n + i\tau'_n$ tendent uniformément vers l'infini en restant dans Δ et que l'argument de t_n tend vers zéro. On déduit également de là les inégalités

$$(7) \qquad \left|\frac{1}{t} + \frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_{n-1}}\right| \leqq \frac{1}{|t|} + \frac{1}{|t_1|} + \ldots + \frac{1}{|t_{n-1}|}$$
$$\leqq \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} + \ldots + \frac{1}{\tau_{n-1}}$$
$$< \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) < \log n.$$

On obtient ensuite, d'après (3),

$$(8) \qquad t_n = t + 2n + \frac{1}{t} + \frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_{n-1}},$$

et, en remarquant que t_n a pour valeur asymptotique $2n$ pour n très grand, on est conduit à écrire ce qui précède de la manière suivante :

$$(9) \qquad t_n - 2n - \sum_1^{n-1} \frac{1}{2p} = t + \frac{1}{t} + \sum_1^{n-1} \frac{2p - t_p}{2p\, t_p}.$$

Or la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{2n - t_n}{2n\, t_n}$ est uniformément convergente quand t reste dans une partie bornée de Δ. On a en effet, d'après (5),

$$|2n\, t_n| > 4n^2,$$

et, d'après (7) et (8),

$$|2n - t_n| < |t| + \log n.$$

Les termes de la série considérée sont donc inférieurs à ceux de la série convergente $\sum \frac{|t| + \log n}{4n^2}$. Elle représente ainsi une fonction holomorphe en tout point de Δ, sauf à l'infini.

D'après (9), on peut écrire, en appelant $H(t)$ cette dernière fonction et E la constante d'Euler,

$$t_n - 2n - \frac{1}{2}\log n = \frac{E}{2} + t + \frac{1}{t} + H(t) + \varepsilon_n(t) = \Phi(t) + \varepsilon_n(t),$$

$\varepsilon_n(t)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On a ainsi

$$\Phi(t) = \lim_{n=\infty}\left(t_n - 2n - \frac{1}{2}\log n\right), \tag{10}$$

ou, en changeant t en $t_1 = Q(t)$ et n en $n - 1$,

$$\Phi(t_1) = \lim_{n=\infty}\left[t_n - 2n + 2 - \frac{1}{2}\log(n-1)\right],$$

d'où, par soustraction,

$$\Phi(t_1) \equiv \Phi[Q(t)] = \Phi(t) + 2. \tag{11}$$

La fonction $\Phi(t)$ vérifie donc l'équation fonctionnelle d'Abel. Je dis que $\Phi(t)$ est holomorphe dans tout le plan, sauf aux points du demi-axe réel négatif.

En effet, soit D un domaine ne contenant aucun point de ce demi-axe, mais intérieur en partie au domaine Δ de tout à l'heure : les fonctions $t_n = Q_n(t)$ sont holomorphes dans D et n'y prennent jamais les valeurs réelles négatives d'après une remarque faite au début ; elles forment ainsi, d'après M. Montel, une famille normale dans D ; et, comme elles convergent uniformément vers l'infini dans une partie de D, il en est de même dans ce domaine tout entier. D'ailleurs, si t_n tend vers l'infini, $t_n - 2 - t_{n-1} = \frac{1}{t_{n-1}}$ tend vers zéro, donc la partie réelle de $t_n - t_{n-1}$ tend vers 2 ; elle

est donc > 1 à partir d'un certain rang; en faisant $n = 1, 2, \ldots$ successivement, on voit par addition que la partie réelle de $(t_n - t)$ est infinie positive avec n. Par conséquent, les domaines *conséquents* de D sont intérieurs à Δ à partir d'un certain rang; la série de tout à l'heure, $\sum \frac{2n - t_n}{2n t_n}$, est uniformément convergente dans D; $\Phi(t)$ est donc holomorphe dans D et y vérifie toujours l'équation d'Abel. J'ai démontré, dans mon Mémoire cité, que l'on a pour $\Phi(t)$ les égalités asymptotiques

$$\Phi(t) = t + O(\log t),$$
$$\Phi'(t) = 1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

quand t s'éloigne à l'infini dans Δ; mais je ne m'en servirai pas ici. Je vais seulement démontrer le résultat suivant, essentiel pour la suite (d'ailleurs moins général que les précédents) : t restant dans Δ, si sa partie réelle est bornée supérieurement, il en est de même de la partie réelle de $\Phi(t)$. D'après l'égalité

$$\Phi(t) = \frac{E}{2} + t + \frac{1}{t} + H(t),$$

il suffit de prouver le fait énoncé pour la fonction $H(t)$. Or, on a

$$H(t) = \sum_1^\infty \frac{2n - t_n}{2n t_n},$$
$$t_n = \tau_n + i\tau'_n = 2n + \eta_n + i\tau'_n,$$

η_n étant positif d'après (5). Il vient alors

$$\frac{2n - t_n}{2n t_n} = \frac{-\eta_n - i\tau'_n}{2n(\tau_n + i\tau'_n)} = \frac{(-\eta_n - i\tau'_n)(\tau_n - i\tau'_n)}{2n(\tau_n^2 + \tau_n'^2)},$$
$$\mathcal{R}\left(\frac{2n - t_n}{2n t_n}\right) = \frac{-\eta_n \tau_n - \tau_n'^2}{2n(\tau_n^2 + \tau_n'^2)^2} < 0$$

et, par suite,

$$\mathcal{R}[H(t)] < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons alors la droite

$$\tau = \tau_0 \qquad (\tau_0 > 4),$$

et sa transformée par la branche de la fonction inverse de $Q(t)$ qui, à l'infini, est de la forme

$$Q_{-1}(t) = t - 2 - \frac{1}{t} \cdots$$

Cette transformée est une courbe simple (branche de cubique circulaire) avec une asymptote parallèle à l'axe imaginaire, et située à gauche de la droite $\tau = \tau_0$. Sur cette droite, on a

$$\mathcal{R}[\Phi(t)] < A,$$

et, sur sa transformée,

$$\mathcal{R}[\Phi(t)] \geqq A - 2$$

en vertu de (11). Donc, dans la bande comprise entre ces deux courbes, on aura

$$A - 2 \leqq \mathcal{R}[\Phi(t)] \leqq A.$$

Ces résultats de calcul étant établis, effectuons maintenant le changement de variables

$$t = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2. \tag{12}$$

On verra facilement $\left(\text{en considérant aussi la variable intermédiaire } \sigma = \sqrt{t} = \frac{z+1}{z-1}\right)$ que la transformation (12) fait correspondre au plan des t, où l'on a tracé la coupure $(0 - \infty)$ de l'axe réel, l'intérieur du cercle $|z| < 1$, pour une détermination convenable de $\sqrt{t}$, et à deux points t, t_1 liés par la relation $t_1 = Q(t)$, deux points z, z_1 liés par

$$z_1 = R(z) = \frac{3z^2+1}{z^2+3}. \tag{13}$$

A $t = \infty$ correspond $z = 1$, racine triple de $R(z) = z$, et (13) définit bien une substitution, à cercle fondamental, singulière et de première espèce. A la droite $\tau = \tau_0$ va correspondre une courbe intérieure au cercle, formée de deux arcs symétriques par rapport à l'axe réel et faisant un angle de 45° avec le rayon OI au point $z = 1$. Soit T le domaine intérieur à cette courbe; nous considérerons d'autre part l'onglet U compris entre cette courbe et sa transformée par la branche de fonction $R_{-1}(z)$ égale à 1 pour $z = 1$; cette courbe enveloppe la première sauf au point $z = 1$; elle est également formée de deux arcs symétriques tangents aux précédents au point $z = 1$ (*fig.* 1). Le domaine T + U est alors le transformé de T par la branche considérée de $R_{-1}(z)$; l'autre branche de cette fonction donne comme image de T un domaine T_{-1}

extérieur au premier, ayant en commun avec la circonférence le point frontière $z = -1$ avec un angle de 90° en ce point.

La fonction

$$f(z) = \Phi\left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right],$$

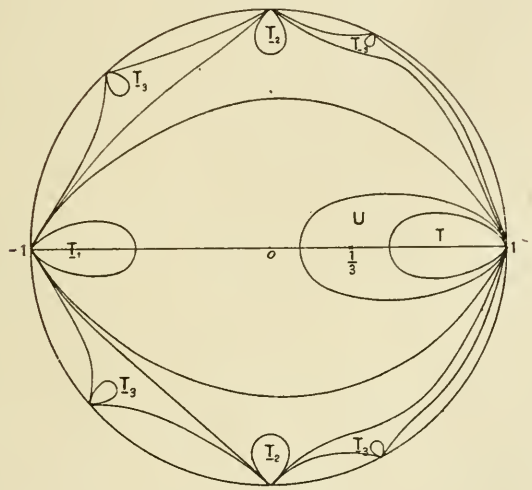
qui vérifie l'équation

$$f[R(z)] = f(z) + 2,$$

est holomorphe pour $|z| < 1$; sa partie réelle dans U est comprise entre A et A — 2.

Soit z un point quelconque intérieur au cercle C dont les conséquents $z_n = R_n(z)$ tendent vers le point $z = 1$ [comme il résulte

Fig. 1.



de ce qu'on a vu au sujet des points $t_n = Q_n(t)$]; ils sont tous, à partir d'un certain rang, intérieurs au domaine T. Si z n'est pas dans T, soit z_p le dernier conséquent de z qui soit extérieur à T; comme z_{p+1} est dans T, z_p est dans U ou dans T_{-1}. Donc z est dans un domaine antécédent de T_{-1} ou de U; donc les domaines T, U, T_{-1} et les domaines antécédents de U et de T_{-1} couvrent tout l'intérieur de C.

Considérons en particulier les domaines T_{-n} antécédents de T_{-1}; ces domaines tendent vers la circonférence quand l'indice n d'itération croît indéfiniment, et cela uniformément; sinon, il existerait des antécédents de certains points de T_{-1} de rang indéfiniment

croissant ayant au moins un point limite ζ intérieur à C, et les domaines conséquents d'un petit cercle de centre ζ ne pourraient pas, comme cela doit être, tendre uniformément vers le point $z=1$, puisqu'une infinité d'entre eux auraient des points communs avec T_{-1}. De plus, les fonctions algébriques $R_{-n}(z)$, inverses des itérées de $R(z)$, sont uniformes dans T_{-1} et même dans un domaine plus étendu D; en effet, les points critiques de ces fonctions sont les conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$, à savoir $z=\frac{1}{3}$ et $z=3$, et tendent vers le point $z=1$ en restant sur le segment $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ de l'axe réel, donc extérieurs à T_{-1}. Les fonctions $R_{-n}(z)$ sont donc holomorphes et bornées dans leur ensemble dans D et forment une famille normale dont les fonctions limites ne peuvent être que des constantes de module 1, puisque leurs points représentatifs dans D, c'est-à-dire les domaines antécédents de D, tendent vers la circonférence $|z|=1$; donc les dérivées de ces fonctions tendent uniformément vers zéro dans T_{-1} et sur son contour, ce qui veut dire que les longueurs des contours des domaines T_{-n} tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Ces domaines sont simplement couverts et simplement connexes; ils sont sans points communs deux à deux; cela résulte pour deux domaines de même rang $T_{-n}^{(p)}$ et $T_{-n}^{(q)}$ de l'uniformité de $R_n(z)$, et pour deux domaines de rangs différents $T_{-n}^{(p)}$ et $T_{-(n+n')}^{(q)}$ du fait que T_{-1} est extérieur à T et T_1, contenu dans T. Enfin, ces domaines ont chacun avec la circonférence un point frontière commun, à savoir un point a_{-n} antécédent de $z=1$. On verra de même sans difficulté que les domaines U_{-n} sont des domaines simplement couverts n'empiétant pas les uns sur les autres ni sur les domaines T_{-n}. On se rendra compte, par une figure schématique, du pavage qui en résulte pour l'intérieur de C.

Soit maintenant ζ un point de la circonférence distinct des points en infinité dénombrable $a_{-n}^{(p)}$ et considérons une ligne simple intérieure à C aboutissant en ζ, par exemple le rayon $O\zeta$; quand z tend vers ζ sur ce rayon, il traverse des régions T_{-n} ou U_{-n} dont le rang n croît indéfiniment; en effet, si $n<n_0$, le point ζ est à une distance $>r>0$ des points des domaines T_{-n} et U_{-n} en nombre fini pour lesquels $n<n_0$; supposons que l'on traverse un

domaine T_{-n} et soient α et β le premier et le dernier point de rencontre du rayon avec le contour de ce domaine; on peut remplacer le segment de rayon $\alpha\beta$ par l'un des deux arcs du contour de T_{-n} de mêmes extrémités, à savoir celui qui ne contient pas de point de la circonférence; on pourra avoir à modifier de cette façon une infinité de fois le chemin initial; mais comme, d'après ce qui précède, les longueurs des arcs de courbe, par lesquels on remplace certains segments du rayon, tendent vers zéro quand on se rapproche de ζ sur le rayon, le nouveau chemin, qui est une courbe de Jordan simple formée d'arcs algébriques, aboutira toujours au seul point ζ. Sur ce dernier chemin, la partie réelle de la fonction $f(z)$ tend vers $-\infty$.

En effet, d'après l'équation d'Abel pour $f(z)$, on a

$$f(z_{-1}) = f(z) - 2,$$
$$f(z_{-n}) = f(z) - 2n.$$

Or, à l'intérieur et sur le contour de U, on a

$$A - 2 \leqq \mathcal{R}[f(z)] \leqq A.$$

Donc à l'intérieur des U_{-n} ou sur le contour des U_{-n} (ou des T_{-n}) on a

$$A - 2(n+1) \leqq \mathcal{R}[f(z)] \leqq A - 2n,$$

et, comme n croît indéfiniment quand z tend vers ζ sur le chemin considéré,

$$\lim \mathcal{R}[f(z)] = -\infty.$$

Le raisonnement est en défaut pour les points a_{-n}. En ces points il y a encore des chemins sur lesquels $f(z)$ tend vers $-\infty$, mais ce sont des chemins tangents à la circonférence. Il suffit de démontrer la chose pour le point $z = 1$; elle résultera de proche en proche de l'équation d'Abel pour les points antécédents.

Or, on pourra toujours trouver une chaîne d'arcs antécédents obtenus par la branche de fonction $R_{-1}(z)$ égale à 1 pour $z = 1$ qui réponde à la question. Pour le démontrer, on reviendra au plan de la variable t et l'on fera l'étude de l'itération de la fonction

$$t_{-1} = Q_{-1}(t) = \frac{t - 2 + \sqrt{(t-2)^2 - 4}}{2} = t - 2 - \frac{1}{t} - \frac{Q}{t^2} \cdots,$$

comme on a fait celle de l'itération de $Q(t)$. Par un choix conve-

nable de l'arc initial, on prouvera facilement que la chaîne d'arcs antécédents obtenue s'éloigne à l'infini vers les z négatifs, avec un argument limite égal à π. Pour plus de détails, on pourra consulter le Mémoire cité.

En revenant au plan des z, on aura ainsi un chemin tangent à la circonférence au point $z=1$ et sur lequel $\mathcal{R}[f(z)]$ tend vers $-\infty$, comme il résulte toujours de l'équation d'Abel.

Enfin, on verra, par des considérations analogues, qu'aux points $z=1$ et aux points antécédents aboutissent également des chemins, normaux cette fois à la circonférence sur lesquels la partie réelle de $f(z)$ tend vers $+\infty$.

Posons maintenant

$$F(z) = e^{f(z)}.$$

$F(z)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$F[R(z)] = e^2 F(z).$$

C'est une fonction holomorphe pour $|z|<1$, jamais nulle dans son domaine d'holomorphie, et qui, en tout point de la circonférence $|z|=1$, possède la valeur asymptotique zéro suivant certains chemins. Elle n'a, d'ailleurs, pas d'autre valeur asymptotique que 0 et ∞.

Si l'on veut une fonction ayant une propriété analogue, mais pour laquelle zéro ne soit pas une valeur exceptionnelle, il suffit de multiplier $F(z)$ par une fonction holomorphe et bornée pour $|z|<1$, avec une infinité de zéros. Il existe de telles fonctions, par exemple

$$\varphi(z) = \prod_{2}^{\infty} \frac{z-a_n}{1-a_n z} \qquad \left(a_n = 1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Il serait intéressant de savoir si les chemins de détermination nulle pour $F(z)$ peuvent, en certains points, être confondus avec le rayon; cela exigerait une étude très délicate de la décroissance des dimensions des domaines T_{-n}, et jusqu'ici je n'y ai pas réussi.

On peut étendre les résultats obtenus pour des fonctions définies dans un domaine circulaire à des fonctions définies dans un domaine limité par des arcs de courbe rectifiables, à l'aide de la représentation conforme; on sait, par les travaux de MM. Cara-

theodory et Osgood, qu'il y a alors correspondance des points des contours; de plus, MM. F. et M. Riesz ont démontré, dans le Mémoire cité, qu'il y a correspondance des ensembles de mesure nulle. On peut donc, en résumé, énoncer les résultats suivants.

Considérons un arc de courbe rectifiable L, une fonction analytique $f(z)$ définie et régulière d'un côté de L; soit E l'ensemble des points de L auxquels aboutissent des lignes sur lesquelles $f(z)$ tend vers la valeur limite A finie ou infinie; ε l'ensemble des points de L où $f(z)$ est continue et prend la valeur A suivant tous les chemins qui y aboutissent ($E \geqq \varepsilon$) :

1° Si $f(z)$ est bornée ou possède seulement deux valeurs exceptionnelles finies, E est toujours de mesure nulle, mais peut être non dénombrable; il en est de même pour ε.

2° Dans le cas général, ε est toujours de mesure nulle, mais E peut être de mesure quelconque et comprendre, par exemple, tous les points de L.

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES EN NOMBRE INFINI;

PAR M. PAUL FLAMANT.

M. Helge von Koch s'est proposé d'étendre les théorèmes d'existence des intégrales des systèmes d'équations différentielles au cas où les fonctions inconnues et les équations sont en nombre infini. Dans un article *Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles*, publié en 1899 dans les *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar* (årg. 56, p. 395), de Stockholm, il a fait cette extension en se plaçant au point de vue du calcul des limites de Cauchy.

Il a étudié d'une part les systèmes d'équations linéaires homogènes, et d'autre part certains systèmes non linéaires. Le théorème d'existence relatif aux systèmes linéaires peut s'obtenir aisément en appliquant la méthode des approximations successives de M. Picard. Ce mode de démonstration a l'avantage de s'appliquer au cas où la variable est réelle et les fonctions figurant en coef-

ficients simplement continues. Si ces fonctions sont holomorphes, la variable étant supposée dans un certain cercle du plan complexe, les expressions obtenues pour les intégrales montrent immédiatement que ces dernières sont holomorphes dans le même domaine.

I.

Prenons un système d'équations différentielles linéaires du type

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \ldots, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_p}{dt} = b_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sont les fonctions inconnues; t la variable indépendante; $a_{11}, \ldots, a_{pn}, \ldots$; $b_1, \ldots, b_p, \ldots$ des fonctions données de cette variable. Nous supposerons que, dans l'intervalle

$$0 \leqq t \leqq h,$$

ces fonctions sont continues et satisfont aux inégalités

$$(2)\qquad |a_{pn}| \leqq u_p v_n \qquad |b_p| \leqq \mathrm{B}\, u_p,$$

B étant une constante, et

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p,\ \ldots;\qquad v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots$$

deux suites de nombres positifs telles que la série

$$\mathrm{S} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n + \ldots$$

soit convergente.

Nous allons déterminer, dans ce même intervalle $(0, h)$, un système d'intégrales prenant pour $t = 0$ les valeurs initiales données

$$x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \ldots.$$

Nous supposerons que ces dernières rendent convergentes la série

$$\Sigma = v_1 |x_1^0| + v_2 |x_2^0| + \ldots + v_n |x_n^0| + \ldots.$$

Prenons arbitrairement un système de fonctions continues dans l'intervalle $(0, h)$: $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Désignons par M_n la borne supérieure de $|y_n|$ dans cet intervalle; nous supposons les y_n choisies de façon à rendre convergente la série

$$M = M_1 c_1 + M_2 c_2 + \ldots + M_n c_n + \ldots.$$

Formons les fonctions $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_p^1, \ldots$, définies par les conditions suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1^1}{dt} = b_1 + a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n + \ldots, & x_1^1(0) = x_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_p^1}{dt} = b_p + a_{p1} y_1 + \ldots + a_{pn} y_n + \ldots, & x_p^1(0) = x_p^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(4)\quad \begin{cases} x_1^1(t) = x_1^0 + \displaystyle\int_0^t [b_1 + a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n + \ldots]\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p^1(t) = x_p^0 + \displaystyle\int_0^t [b_p + a_{p1} y_1 + \ldots + a_{pn} y_n + \ldots]\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les seconds membres des équations (3) sont bien convergents dans tout l'intervalle $(0, h)$; car, par suite des hypothèses,

$$|b_p + a_{p1} y_1 + \ldots + a_{pn} y_n + \ldots| \leqq B u_p + u_p c_1 M_1 + \ldots + u_p c_n M_n + \ldots.$$

Donc

$$\left|\frac{dx_p^1}{dt}\right| \leqq u_p (B + M)$$

et, d'après les relations (1),

$$\mu_p^1 = \max. |x_p^1| = |x_p^0| + (B + M)\, h\, u_p.$$

Les fonctions $x_1^1, \ldots, x_p^1, \ldots$ satisfont donc à une condition analogue à celle que nous avons imposée aux $y_1, \ldots, y_p, \ldots$: la série

$$(5)\qquad \mu_1^1 c_1 + \mu_2^1 c_2 + \ldots + \mu_n^1 c_n + \ldots$$

est convergente, car

$$\mu_n^{(1)} v_n \leqq v_n |x_n^0| + (B + M) h u_n v_n;$$

le membre de droite est la somme des termes généraux des deux séries convergentes Σ et $S(B+M)h$.

On peut donc opérer sur ces fonctions $x_1^{(1)}, \ldots, x_p^{(1)}, \ldots$ comme sur les fonctions $y_1, \ldots, y_p, \ldots$, et poursuivre indéfiniment la formation de ces fonctions successives d'après les formules

$$(6)\quad \begin{cases} x_1^{(\nu)}(t) = x_1^0 + \int_0^t [b_1 + a_{11} x_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_{1n} x_n^{(\nu-1)} + \ldots] dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p^{(\nu)}(t) = x_p^0 + \int_0^t [b_p + a_{p1} x_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_{pn} x_n^{(\nu-1)} + \ldots] dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il est facile de voir que, pour chaque valeur de p, $x_p^{(\nu)}$ tend vers une fonction limite lorsque ν augmente indéfiniment. Regardons $x_p^{(\nu)}$ comme la somme des ν premiers termes d'une série dont les termes successifs sont

$$z_p^{(\nu-1)} = x_p^{(\nu)} - x_p^{(\nu-1)}.$$

Cette série

$$(7)\qquad x_p^{(1)} + z_p^{(1)} + z_p^{(2)} + \ldots + z_p^{(\nu-1)} + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente pour $0 \leqq t \leqq h$.

D'après le mode de formation des fonctions $x_p^{(\nu)}$ [formules (4) et (6)], les fonctions $z_p^{(\nu)}$ sont définies par

$$z_p^{(1)} = \int_0^t \{ a_{p1} [x_1^{(1)} - y_1] + \ldots + a_{pn} [x_n^{(1)} - y_n] + \ldots \} dt,$$

puis

$$(8)\qquad z_p^{(\nu)} = \int_0^t [a_{p1} z_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{pn} z_n^{(\nu-1)} + \ldots] dt$$

à partir de $\nu = 2$.

La fonction à intégrer pour avoir $z_p^{(1)}$ satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned} &|a_{p1}[x_1^{(1)} - y_1] + \ldots + a_{pn}[x_n^{(1)} - y_n] + \ldots| \\ &\leqq u_p v_1 (\mu_1^{(1)} + M_1) + \ldots + u_p v_n (\mu_n^{(1)} + M_n) + \ldots \end{aligned}$$

La série M et la série (5) étant convergentes, le second membre est de la forme

$$A u_p.$$

On voit donc que

$$|z_p^1| \leqq A u_p t.$$

La formule (8), appliquée pour $\nu = 2$, montre que

$$\left|\frac{dz_p^2}{dt}\right| \leqq u_p c_1 A u_1 t + u_p c_2 A u_2 t + \ldots + u_p c_n A u_n t + \ldots,$$

$$\left|\frac{dz_p^2}{dt}\right| \leqq AS u_p t,$$

d'où

$$|z_p^2| = AS u_p \frac{t^2}{2}.$$

On verrait de même que l'on a, en général,

$$|z_p^\nu| \leqq AS^{\nu-1} u_p \frac{t^\nu}{\nu!} = \frac{A}{S} u_p \frac{(St)^\nu}{\nu!}.$$

Les termes de la série (7) sont donc, au facteur constant $\frac{A}{S} u_p$ près, inférieurs aux termes de même rang de la série e^{St}; cette série est donc bien absolument et uniformément convergente; nous désignerons par x_p sa somme :

$$x_p = x_p^1 + z_p^1 + z_p^2 + \ldots + z_p^{(\nu)} + \ldots = \lim_{\nu=\infty} x_p^{(\nu)}.$$

Remarquons en outre que ces séries (7), pour les différentes valeurs de p, sont comparables à des séries qui ne diffèrent que par le facteur u_p. On voit donc immédiatement que, ε étant un nombre positif arbitraire, on peut lui faire correspondre un entier N tel que, pour

$$\nu \geqq N,$$

on ait

$$|x_p - x_p^{(\nu)}| \leqq \varepsilon u_p$$

pour toutes les valeurs de l'entier p, et quel que soit t dans l'intervalle $(0, h)$.

Nous pouvons alors voir que, dans la $p^{\text{ième}}$ relation (6), la fonction à intégrer tend uniformément, pour ν infini, vers

$$b_p + a_{p1} x_1 + \ldots + a_{pn} x_n + \ldots$$

En effet, la différence entre les deux fonctions est la série

$$a_{p1}[x_1 - x_1^{(\nu)}] + \ldots + a_{pn}[x_n - x_n^{(\nu)}] + \ldots$$

inférieure en module, pour $\nu \geqq N$, à

$$u_p v_1 \varepsilon u_1 + \ldots + u_p v_n \varepsilon u_n + \ldots = S u_p \varepsilon.$$

On voit donc que l'on a

$$(9) \quad \begin{cases} x_1(t) = x_1^0 + \int_0^t [b_1 + a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n + \ldots]\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_p(t) = x_p^0 + \int_0^t [b_p + a_{p1} x_1 + \ldots + a_{pn} x_n + \ldots]\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le système de fonctions $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ satisfait donc bien aux équations (1) et aux conditions initiales données.

II.

Si l'on impose en outre aux fonctions inconnues la condition suivante (analogue à celle que vérifient les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, à partir desquelles on forme les approximations successives) : M_n désignant le maximum de $|x_n|$ dans l'intervalle, la série

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 + \ldots + M_n v_n + \ldots$$

doit être convergente, il est aisé d'établir que la solution est unique.

Soient, en effet, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ et $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ deux solutions du système (1) répondant aux mêmes conditions initiales. Les fonctions $\xi_1 = x_1 - y_1, \ldots, \xi_n = x_n - y_n, \ldots$ vérifient le système linéaire homogène

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\xi_p}{dt} = a_{p1}\xi_1 + \ldots + a_{pn}\xi_n + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

s'annulent pour $t = 0$ et satisfont à la condition imposée aux solutions x_n et y_n. La série

$$(11) \qquad c_1|\xi_1| + c_2|\xi_2| + \ldots + c_n|\xi_n| + \ldots$$

est donc convergente dans tout l'intervalle considéré; elle y définit une fonction $\xi(t)$. Soit $h' < h$; appelons μ la borne supérieure de $\xi(t)$ dans l'intervalle $(0, h')$; dans cet intervalle, on a

$$\left|\frac{d\xi_p}{dt}\right| \leqq u_p c_1|\xi_1| + \ldots + u_p c_n|\xi_n| + \ldots = u_p \xi(t) \leqq \mu u_p.$$

Comme $\xi_p(0) = 0$, on a aussi

$$|\xi_p| \leqq \mu u_p h'$$

pour toute valeur de p; et, par conséquent,

$$\xi(t) = \Sigma c_p|\xi_p| \leqq \mu h' \Sigma u_p c_p = S\mu h'.$$

Si h' a été choisi plus petit que $\frac{1}{S}$; par exemple $h' = \frac{1}{2S}$, on voit que $\xi(t) \leqq \frac{\mu}{2}$, ce qui est contradictoire avec le fait que μ est la borne supérieure de $\xi(t)$. Il faut donc nécessairement que $\mu = 0$, donc $\xi(t) \equiv 0$; la série (11) étant à termes tous positifs, on a aussi

$$\xi_1 \equiv \xi_2 \equiv \ldots \equiv \xi_n \equiv \ldots \equiv 0.$$

Les solutions $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ et $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ coïncident donc dans tout l'intervalle $(0, h')$. Il suffit de diviser l'intervalle $(0, h)$ en intervalles successifs inférieurs à $\frac{1}{S}$ (égalité exclue) pour voir que les deux solutions coïncident dans tout l'intervalle considéré.

REMARQUE SUR LES PROBABILITÉS CONTINUES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

M. B. Hostinsky a publié dans ce *Bulletin* (2e série, t. XLIV, 1920) une application très intéressante au problème de l'aiguille d'un théorème de Poincaré. Dans ce but, il a étendu ce théorème au cas de plusieurs variables. Je voudrais faire remarquer qu'il a

conservé cependant une hypothèse de Poincaré qui n'est pas indispensable.

Le *théorème de Poincaré* peut être énoncé sous une forme indépendante de la notion de probabilité comme suit : « Étant donnée sur un intervalle A une fonction $f(\theta)$, si l'on divise A en $2n$ parties égales, peintes alternativement en rouge et en blanc, l'intégrale de $f(x)$ sur l'ensemble I des divisions rouges et l'intégrale de $f(x)$ sur l'ensemble J des divisions blanches, tendent vers la moitié de l'intégrale totale quand n croît indéfiniment. » Poincaré démontre ce résultat en supposant seulement que $f(\theta)$ a une dérivée et que cette dérivée est bornée sur A.

Cette condition est inutile.

M. Émile Borel a en effet démontré le même théorème dans son remarquable Ouvrage sur le *Calcul des Probabilités* en supposant seulement que $f(\theta)$ est uniformément continue sur A.

Bien qu'on puisse s'en tenir à ce résultat au point de vue de la théorie des probabilités, il n'est peut-être pas inutile, au point de vue de la Théorie des fonctions, de remarquer qu'un raisonnement tout aussi simple peut se contenter de l'*hypothèse minimum*, celle qui consiste à supposer que $f(\theta)$ est intégrable, autrement dit que l'*énoncé a un sens*.

Soient, en effet, M_k, m_k les bornes de $f(\theta)$ dans le $k^{\text{ième}}$ couple d'intervalle. La différence entre les intégrales de $f(\theta)$ sur les deux intervalles de ce couple est en valeur absolue au plus égale à $\frac{A}{2n}(M_k - m_k)$.

Donc

$$\left| \int_I f(\theta)\, d\theta - \int_J f(\theta)\, d\theta \right|$$

est au plus égal à

$$\frac{1}{2}\left[\sum \frac{A}{n} M_k - \sum \frac{A}{n} m_k\right] = \frac{1}{2}(S - s),$$

S et s étant les sommes de Darboux qui convergent vers l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure de $f(\theta)$ sur A, lorsque n croît indéfiniment. Si $f(\theta)$ est intégrable, cette différence tend vers zéro : ni l'hypothèse de Poincaré, ni celle de M. Borel ne sont indispensables.

1ère Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

INSTITUT MATHÉMATIQUE MITTAG-LEFFLER. — 1 plaquette in-8° de 12 pages et une photographie de la Villa Mittag-Leffler (siège de l'Institut). Upsala, Almquist et Wihsells, 1920.

Pour voir *de son vivant* l'Institut Mathématique, fondé par lui et par sa femme, commencer son activité, le Professeur Mittag-Leffler, qui avait fait parvenir à l'Académie Royale des Sciences Suédoise un don d'un million de couronnes dont les revenus (5 pour 100 au minimum) devraient être consacrés à l'entretien de l'Institut Mathématique, a réuni, le 9 février 1919, le Comité directeur de l'Institut en vue de constituer cet Institut et d'en établir les statuts.

L'Institut Mathématique Mittag-Leffler, créé dans l'intérêt et pour la plus grande gloire de la Suède, et qui a trouvé son modèle dans l'Institut Pasteur à Paris, vient de faire paraître le compte rendu de cette réunion constituante et l'a fait suivre de quelques documents complémentaires.

Nous ne réimprimerons pas ici le détail des statuts qui ont été adoptés en cette réunion, car ils reproduisent, sous une forme officielle, les dispositions du testament dressé et signé le 16 mars 1916 par les époux Mittag-Leffler. Nous renverrons le lecteur, pour la connaissance de ces dispositions, à l'*Extrait* que nous avons donné de ce testament dans le numéro d'octobre 1916, aux pages 316-320. Ces dispositions qui intéressent exclusivement les quatre pays du Nord : Suède, Danemark, Finlande et Norvège, lorsqu'il s'agit de bourses à allouer ou d'ouvrages à honorer, intéressent tous les savants du monde lorsqu'il s'agit de « découvertes réelles dans le domaine des Mathématiques pures ».

Rappelons aussi que les documents contenus dans la Bibliothèque de l'Institut Mathématique peuvent être consultés par les savants de toutes nationalités, mais sur place seulement.

Nous ajouterons, au texte antérieurement publié, les renseignements nouveaux suivants par lesquels se termine la brochure :

« Sa Majesté le Roi Gustave V a fait parvenir, le 11 février 1919, ..., plein pouvoir au Professeur Mittag-Leffler comme président du Comité et directeur de l'Institut. »

« Sur la proposition du Professeur Mittag-Leffler, le Comité a nommé, en sa séance du 5 octobre 1919, le Professeur N.-E. Nörlund comme vice-directeur. »

« Le 9 octobre 1919, M. Mittag-Leffler a présenté à l'Académie Royale des Sciences la grande villa à Djursholm avec dépendances pour être tenue à la disposition de son Institut Mathématique. »

La R.

VIVANTI (Giulio). — Lezioni di Analisi infinitesimale. Seconda edizione riveduta ed ampliata. *Fascicolo secondo,* a complemento dell' opera. [Leçons d'Analyse infinitésimale. Seconde édition, revue et augmentée. Second fascicule, complétant l'ouvrage.] 1 vol. gr. in-8°, 370 pages. Torino, S. Lattes e C.; 1920.

En analysant, ici même (¹), le premier fascicule des *Leçons d'Analyse infinitésimale* de M. Vivanti, nous avons eu l'occasion d'indiquer les caractères généraux de cet excellent Ouvrage. Nous pouvons donc passer immédiatement au détail des questions traitées dans le second fascicule. Le Volume est divisé en trois Parties consacrées respectivement : aux applications géométriques de l'Analyse, à la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles, aux éléments du Calcul des variations.

Les *applications géométriques* occupent la moitié du Volume. Elles ont été très largement développées, pour elles-mêmes et non point seulement pour y trouver l'illustration des théories de l'Analyse. L'exposé de M. Vivanti est donc assez complet, et c'est ainsi que, pour ne citer qu'un exemple, les diverses applications des coordonnées homogènes y sont envisagées. Voici, d'ailleurs, le programme traité.

En ce qui concerne d'abord les courbes planes, l'auteur étudie les questions suivantes : tangentes et normales, points multiples

---

(¹) *Voir* cette Analyse à la page 25 de ce Tome, Ire Partie (numéro de février).

et branches infinies, concavité, longueurs et aires, enveloppes et courbures, éléments de la théorie du contact. Il s'occupe ensuite successivement des courbes gauches (courbures) et des surfaces : plans tangents, aires et volumes, enveloppes; il termine par une étude de la courbure des surfaces, très simplement présentée et assez approfondie, puisqu'elle comprend la définition de la courbure de Gauss, comme rapport d'aires de la surface et de son image sphérique.

Sur toute cette portion du Livre, dont on appréciera la parfaite tenue logique et où des exemples, nombreux et bien choisis, viennent éclairer l'exposition, nous n'aurions à formuler que des réserves de détail. Par exemple sur la définition adoptée pour l'asymptote, définition qui n'est peut-être pas la plus avantageuse, au point de vue théorique comme pour la recherche pratique. Peut-être aussi n'y aurait-il pas eu d'inconvénient à passer plus rapidement sur quelques points : ainsi sur des vérifications par le calcul de propriétés d'invariance (à la page 384 « les points d'inflexion sont indépendants du choix des axes de coordonnées »).

Mais il sera plus intéressant d'insister ici sur l'originalité principale de toute cette étude géométrique : la place faite à l'Analyse vectorielle. Déjà, dans la première édition du Livre, un Appendice était consacré à cette théorie et à ses applications géométriques. C'est maintenant parallèlement à la méthode des coordonnées, sans aucune prétention d'autonomie, que l'auteur développe la méthode vectorielle. Il donne, au début du Volume, quelques notions générales du Calcul vectoriel, étudiant les propriétés des produits, l'opérateur i, établissant la formule de Taylor pour les vecteurs, définissant et indiquant les propriétés du gradient; dans la suite, la plupart des questions géométriques envisagées sont, après avoir été traitées du point de vue classique, reprises par les méthodes vectorielles. On ne pouvait mieux souligner au lecteur les avantages de ces méthodes, ni lui en faciliter davantage l'assimilation. L'étude des champs de vecteurs (divergence et rotationnel) n'est pas abordée et ne pouvait l'être, l'auteur ayant laissé de côté (exception faite, dans le premier Volume, de la formule de Green dans le plan) les relations entre intégrales curvilignes, intégrales de surfaces et intégrales triples; il est pourtant bien désirable qu'une théorie aussi essentielle en Physique

trouve place dans les Cours, même assez élémentaires, de Calcul infinitésimal.

La Section suivante du Livre est consacrée, comme il a déjà été dit, à la théorie des *équations différentielles* et des *équations aux dérivées partielles;* en ce qui concerne ces dernières, seules les équations *du premier ordre*, linéaires ou non, sont étudiées. L'auteur ne s'occupe pas des théorèmes d'existence. Il aborde donc l'étude théorique des divers types généraux d'équations envisagés en partant d'une solution contenant les arbitraires nécessaires (intégrale générale pour une équation différentielle, intégrale complète pour une équation aux dérivées partielles); il souligne comment la recherche d'autres solutions conduit à la détermination des intégrales singulières et aussi, pour une équation aux dérivées partielles, à l'intégrale générale. L'interprétation géométrique des résultats obtenus n'est pas négligée et après ces généralités qui ont été plus développées que dans bien des Traités analogues (par exemple pour le cas des équations différentielles d'ordre supérieur), M. Vivanti effectue l'étude détaillée des équations dont l'intégration est élémentaire. Il est bien inutile d'énumérer ici les divers types traités. Signalons seulement au passage que, dans l'intégration des équations différentielles linéaires homogènes et à coefficients constants, l'auteur emploie une méthode qui évite toute introduction d'imaginaires; l'avantage est minime, mais la méthode, fort élégamment exposée, ne laisse pas d'être instructive.

Les développements donnés, à la fin du Volume, sur le *Calcul des variations*, sont amplement justifiés par l'importance de cette théorie. L'auteur s'est d'ailleurs borné, comme il convenait dans un Ouvrage assez élémentaire, aux notions les plus simples : il forme les conditions du premier ordre pour l'extremum libre d'une intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ et pour les problèmes d'extremum lié correspondants; il termine par quelques brèves indications sur diverses extensions : transversalité, intégrales paramétriques, cas de plusieurs inconnues, intégrales multiples. On voit que l'exposé de M. Vivanti, simple sans être jamais superficiel, constitue une excellente introduction à l'étude des Traités spéciaux.

J. Pérès.

.93

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE ET LA THÉORIE DES FONCTIONS AUTOMORPHES;

PAR M. V. SMIRNOFF.

PRÉFACE.

Étant donnée une équation différentielle

$$(\mathrm{I}) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

si l'on désigne par η le quotient de deux intégrales indépendantes de cette équation, la considération de la variable indépendante x, comme fonction de η, sera appelée le « problème d'inversion de l'équation (I) ». Ce problème nous conduit à la fonction

$$(\mathrm{II}) \qquad x = \varphi(\eta),$$

en général multiforme. Les cas d'uniformité de cette fonction sont d'un intérêt particulier. Dans ce cas elle sera, comme on le sait, une fonction automorphe ou l'une de ses dégénérescences. Le groupe des substitutions linéaires que subit η, x décrivant les contours fermés, sera le groupe de cette fonction automorphe. Ce groupe sera appelé le « groupe de l'équation (I) ».

Le problème d'inversion pour l'équation différentielle de Gauss a été étudié par Schwarz (*Journal de Crelle*, t. 75). Dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction (II) soit uniforme est que la différence des racines de l'équation fondamentale déterminante relative à chaque point singulier soit égale à zéro ou à une fraction $\frac{1}{n}$, où n est un nombre entier.

Nous étudions ici le problème d'inversion pour une équation ayant quatre points singuliers et ses intégrales régulières. La condi-

tion susindiquée d'uniformité de la fonction (II) n'est dans ce cas que nécessaire. Nous examinons seulement le cas où la différence des racines de l'équation fondamentale déterminante est égale à zéro en chaque point singulier. Ce cas est analogue au cas de l'équation de Legendre dans la théorie générale de l'équation de Gauss. L'équation en question peut être ramenée à la forme

$$\text{(III)} \qquad \frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x-\lambda)y = 0,$$

où 0, a, 1 et ∞ sont les points singuliers et λ un paramètre arbitraire. Nous nous bornons au cas de réalité de a et λ. Dans ce cas le quotient des intégrales η transforme la partie du plan x, située au-dessus de l'axe réel, en un quadrilatère simplement connexe, sans points de ramification, limité par quatre arcs des circonférences dont les angles sont nuls. Inversement, à tout quadrilatère de ce genre correspond une équation (III). Notre problème consiste à l'étudier, la fonction (II) et le groupe Γ de l'équation (III) dépendant du paramètre λ.

Poincaré, dans son Mémoire célèbre : *Sur le groupe des équations différentielles linéaires* (*Acta mathematica*, t. IV), a donné la méthode dite « de continuité », pour la résolution des questions de ce genre, et cette méthode nous a guidé dans l'étude de l'équation (III).

Pour l'appliquer il faut d'abord établir les théorèmes d'oscillation pour l'équation, ce que nous faisons dans le Chapitre I. L'équation (III) a été traitée à ce point de vue par Hilbert (*Grundzüge der allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen*) par la méthode des équations intégrales [1]. Nous employons ici la méthode classique de Sturm.

Dans le Chapitre II nous établissons tous les cas d'uniformité de la fonction (II).

Dans le Chapitre III nous étudions le groupe Γ de l'équation (III) dépendant du paramètre λ et traitons la question de la détermination de l'équation (III), quand le groupe Γ est donné.

Ce Mémoire est extrait de ma Thèse : *Le problème d'inversion de l'équation différentielle linéaire du second ordre avec*

---

[1] *Voir* aussi König, *Math. Annalen*, t. 71.

quatre points singuliers (Petrograde, 1918), qui contient encore l'étude du cas général d'une équation avec quatre points singuliers.

En raison des événements survenant dans ma patrie en ce moment, je suis trop complètement privé de littérature mathématique pour pouvoir faire les citations nécessaires.

Simpheropol (Crimée), août 1920.

CHAPITRE I.

1. L'équation différentielle linéaire du second ordre avec quatre points singuliers réguliers peut être ramenée à la forme

$$(1)\qquad \frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda)y=0,$$

si les racines des équations fondamentales déterminantes sont égales. Nous supposerons a et λ réels et a compris entre 0 et 1. La dernière supposition ne diminue pas la généralité du problème. Dans le voisinage du point $x=0$, l'équation (1) aura les intégrales suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} y_0(x,\lambda)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^k, \\ \overline{y}_0(x,\lambda)=y_0(x,\lambda)\log x+\varphi_0(x,\lambda), \end{cases}$$

où $\varphi_0(x,\lambda)$ est une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x. Dans le voisinage des points singuliers $x=a$, 1 et ∞, nous aurons :

$$(3)\qquad \begin{cases} y_a(x,\lambda)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k(x-a)^k, \\ \overline{y}_a(x,\lambda)=y_a(x,\lambda)\log(x-a)+\varphi_a(x,\lambda), \\ y_1(x,\lambda)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(x-1)^k, \\ \overline{y}_1(x,\lambda)=y_1(x,\lambda)\log(x-1)+\varphi_1(x,\lambda), \\ y_\infty(x,\lambda)=\frac{1}{x}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}d_k\frac{1}{x^k}, \\ \overline{y}_\infty(x,\lambda)=y_\infty(x,\lambda)\log\frac{1}{x}+\varphi_\infty(x,\lambda). \end{cases}$$

Les coefficients a_k, b_k, c_k et d_k sont des polynomes en λ et l'on peut démontrer que $y_0(x, \lambda)$, $y_a(x, \lambda)$ $y_1(x, \lambda)$ et $y_\infty(x, \lambda)$ sont des fonctions entières transcendantes de λ. Soit en effet ρ le rayon de convergence de la série $y_0(x, \lambda)$ (¹). Si k est assez grand, $|a_k| < \frac{1}{(\rho - \varepsilon)^k}$, où ε est une quantité positive fixe inférieure à ρ.

Posons $x = m$, où $|m| < \rho - \varepsilon$. Les séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k m^k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k m^{k-1}$ représentent des fonctions entières transcendantes de λ, car elles convergent uniformément par rapport à λ, c'est-à-dire que les conditions initiales de l'intégrale $y_0(x, \lambda)$ au point ordinaire $x = m$ sont des fonctions entières transcendantes de λ, et il est bien connu que, dans ce cas, l'intégrale elle-même sera une fonction entière transcendante de λ. En général, soit $y(x, \lambda)$ une intégrale de l'équation (1). Elle aura, dans le voisinage du point $x = 0$, la forme

$$\omega(\lambda) y_0(x, \lambda) \log x + \varphi(x, \lambda),$$

et si les valeurs $y(x, \lambda)$ et $y'(x, \lambda)$ sont des fonctions entières transcendantes de λ pour un certain point $x = m$, $\omega(\lambda)$ et $\varphi(x, \lambda)$ sont aussi des fonctions entières transcendantes de λ. Nous désignerons par $\overline{y}_0(x, \lambda)$, $\overline{y}_a(x, \lambda)$, $\overline{y}_1(x, \lambda)$ et $\overline{y}_\infty(x, \lambda)$ des intégrales logarithmiques quelconques, qui sont des fonctions entières transcendantes de λ.

Soit $y(x, \lambda)$ une intégrale réelle sur le segment $(0, a)$ de l'axe réel, et soit

$$\omega(\lambda) y_a(x, \lambda) \log(a - x) + \varphi(x, \lambda)$$

son expression dans le voisinage du point $x = a$.

Nous la prolongeons à travers le point $x = a$, en prenant pour $x > a$ l'expression

$$\omega(\lambda) y_a(x, \lambda) \log(x - a) + \varphi(x, \lambda).$$

Nous dirons que c'est le prolongement réel.

Soit η le quotient de deux intégrales indépendantes de l'équation (1). Si nous décrivons un contour fermé, en partant d'un point ordinaire de l'équation (1), η subit une substitution linéaire

(¹) $\rho = a$ ou 1.

$\frac{\alpha\tau_1+\beta}{\gamma\tau_1+\delta}$. L'ensemble de toutes ces substitutions forme le groupe Γ de l'équation (1). Pour que ce groupe soit fuchsien, il faut et il suffit qu'il existe une intégrale holomorphe en deux points singuliers voisins ou qu'il existe une intégrale holomorphe en deux points non voisins, à condition que son prolongement soit réel à travers le point singulier intermédiaire [1]

Le changement de variables

$$(4)\qquad x_1=\frac{a(x-1)}{x-a},\qquad y_1=\frac{1}{x_1-a}y$$

transforme l'équation (1) en elle-même, en permutant les segments $(0, a)$, $(1, \infty)$ et $(a, 1)$, $(\infty, 0)$. De là découle que s'il existe une intégrale holomorphe aux points $x=0$ et $x=a$, il existe aussi une intégrale holomorphe aux points $x=\infty$ et $x=1$, et s'il existe une intégrale holomorphe aux points $x=a$ et $x=1$, il existe aussi une intégrale holomorphe aux points $x=\infty$ et $x=0$. Il est évident que l'intégrale ne peut pas être holomorphe aux trois points singuliers. Si le groupe Γ est fuchsien, mais s'il n'existe pas d'intégrale holomorphe en deux points singuliers voisins, l'intégrale holomorphe en un point singulier quelconque, prolongée réellement à travers un point singulier voisin quelconque, sera holomorphe au point singulier suivant.

Nous aurons ainsi, pour que le groupe Γ soit fuchsien, les trois conditions suivantes :

1° L'intégrale $y_0(x, \lambda)$ est holomorphe au point $x=a$;

2° L'intégrale $y_a(x, \lambda)$ est holomorphe au point $x=1$;

3° $y_0(x, \lambda)$ prolongée réellement à travers $x=a$ est holomorphe au point $x=1$.

2. Étudions la première condition. L'équation (1) nous donne

$$(5)\qquad \begin{cases} x(x-a)(x-1)\dfrac{dy_0(x, \lambda)}{dx}=-\displaystyle\int_0^x (x+\lambda)y_0(x, \lambda)\,dx \\ \qquad (0\leqq x\leqq a). \end{cases}$$

Soit $\lambda<-a$. Le deuxième membre de cette formule est positif,

---

[1] *Voir* KLEIN, *Math. Ann.*, t. 40.

tant que $y_0(x, \lambda) > 0$. Mais $y_0(x, \lambda)$ ne peut devenir négative que si auparavant $\frac{dy_0(x, \lambda)}{dx}$ devenait négative. De là découle que si $\lambda < -a$, $y_0(x, \lambda)$ n'a pas de racines dans l'intervalle $(0, a)$. Inversement, si la valeur de λ est assez grande, $y_0(x, \lambda)$ aura des racines dans un intervalle quelconque (a', b'), contenu à l'intérieur de $(0, a)$. En effet, on peut ramener l'équation (1) à la forme $y'' + q(x)y = 0$, et, si la valeur de λ est assez grande, le coefficient $q(x)$ sera plus grand qu'un nombre positif donné à l'avance, et le théorème connu de Sturm nous donne le résultat désiré.

Désignons par $y_{0\lambda}(x, \lambda)$ la dérivée de $y_0(x, \lambda)$ par rapport à λ. Elle vérifie l'équation

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy_{0\lambda}(x, \lambda)}{dx}\right] + (x+\lambda)y_{0\lambda}(x, \lambda) = -y_0(x, \lambda).$$

Cette équation et l'équation (1) nous donnent

$$(6) \quad x(x-a)(x-1)\left[\frac{dy_0(x, \lambda)}{dx}y_{0\lambda}(x, \lambda) - \frac{dy_{0\lambda}(x, \lambda)}{dx}y_0(x, \lambda)\right] = \int_0^x [y_0(x, \lambda)]^2\,dx.$$

Soit $x = m$, la racine de $y_0(x, \lambda)$ dans l'intervalle $(0, a)$. La formule (6) nous donne

$$\left[\frac{dy_0(x, \lambda)}{dx}y_{0\lambda}(x, \lambda)\right]_{x=m} > 0,$$

c'est-à-dire que les racines de $y_0(x, \lambda)$, contenues dans l'intervalle $(0, a)$ diminuent quand λ croît. Ces racines sont simples et elles ne peuvent ni disparaître ni apparaître à l'intérieur de l'intervalle $(0, a)$.

Faisons le prolongement analytique de $y_0(x, \lambda)$ le long de l'axe réel et soit

$$\alpha(\lambda)y_a(x, \lambda)\log(a-x) + \varphi_a(x, \lambda)$$

l'expression de cette intégrale dans le voisinage du point $x = a$. Le coefficient $\alpha(\lambda)$ ne peut pas être égal à zéro identiquement, car dans ce cas la formule (6) nous donnerait

$$\int_0^a [y_0(x, \lambda)]^2\,dx = 0,$$

et $\alpha(\lambda)$ est une fonction entière transcendante de λ.

Supposons que, λ croissant, $\alpha(\lambda)$ ne s'annule pas. Dans ce cas le nombre de racines de $y_0(x, \lambda)$ dans l'intervalle $(0, a)$ ne change pas. Soit $\lambda = \lambda'$ une racine de $\alpha(\lambda)$. C'est une racine simple, car dans le cas contraire la formule (6) nous donnerait

$$\int_0^a [y_0(x, \lambda')]^2 \, dx = 0.$$

La fonction $\varphi_a(x, \lambda')$ ne diffère que par un multiplicateur constant de $y_a(x, \lambda')$, et la formule (6) nous montre que le signe de $\varphi_a(x, \lambda')$ coïncide avec le signe de $\left[\frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda'}$. Supposons par exemple que ce soit le signe $+$.

De l'expression de $y_0(x, \lambda)$ dans le voisinage du point $x = a$, on voit que $y_0(x, \lambda)$ est positive, si λ et x sont moindres et assez voisins respectivement de λ' et a, et a, pour ces valeurs de λ, un nombre déterminé de racines dans l'intervalle $(0, a)$. Ces racines diminuent quand λ tend vers λ', et leur nombre sera le même si $\lambda = \lambda'$. λ croissant encore, ces racines diminueront et resteront dans l'intervalle $(0, a)$. On peut fixer $x = a'' < a$ et choisir $\lambda = \lambda'' > \lambda'$ assez voisin de λ' et tel que $y_0(a'', \lambda'') < 0$.

Faisons ensuite tendre x vers a. Nous obtiendrons la valeur $x = a''' < a$ telle que $y_0(a''', \lambda'') > 0$. L'intégrale $y_0(x, \lambda'')$ doit par suite avoir au moins une racine dans l'intervalle (a'', a'''), et, comme nous pouvons fixer a'' assez voisin de a, cette racine est différente des racines susdites. Ainsi, quand λ en croissant passe par la racine de $\alpha(\lambda)$, le nombre des racines de $y_0(x, \lambda)$ dans l'intervalle $(0, a)$ augmente d'une unité.

Supposons, en effet, que le passage λ par λ' introduise deux racines nouvelles x' et x''. Elles tendent vers a, si λ tend vers λ' en décroissant, et le théorème connu de Sturm nous apprend que l'intégrale $y_a(x, \lambda)$ a une racine comprise entre x' et x'' et tendant par suite vers a; mais c'est absurde, car $y_a(a, \lambda') = 1$ et $y_a(x, \lambda)$ est une fonction holomorphe de x et λ dans le voisinage $x = a$ et $\lambda = \lambda'$. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème I. — Il existe une infinité de valeurs du paramètre λ,

$$-a < \lambda_\pi < \lambda_{2\pi} < \ldots < \lambda_{n\pi} < \ldots,$$

telles que l'intégrale $y_0(x, \lambda_{n\pi})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, prolongée le long

de l'axe réel, soit holomorphe au point $x = a$ et ait $(n-1)$ racines dans l'intervalle $(0, a)$, et les valeurs $\lambda_{n\pi}$ sont les seules racines réelles de l'équation

$$\alpha(\lambda) = 0. \tag{7}$$

Soit $\beta(\lambda)\, y_1(x, \lambda) \log(1-x) + \varphi_1(x, \lambda)$ la forme de l'intégrale $y_a(x, \lambda)$ prolongée le long de l'axe réel, dans le voisinage du point $x = 1$. On peut démontrer, d'une façon analogue à la précédente, le théorème suivant :

Théorème II. — Il existe une infinité de valeurs du paramètre λ,

$$-a > \lambda_{-\pi} > \lambda_{-2\pi} > \ldots \lambda_{-n\pi} > \ldots,$$

telles que l'intégrale $y_a(x, \lambda_{-n\pi})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, prolongée le long de l'axe réel, soit holomorphe au point $x = 1$ et ait $(n-1)$ racines dans l'intervalle $(a, 1)$, et les valeurs $\lambda_{-n\pi}$ sont les seules racines réelles de l'équation

$$\beta(\lambda) = 0. \tag{8}$$

Si $\lambda < -a$, $y_0(x, \lambda)$ n'a pas de racines dans l'intervalle $(0, a)$, et si $\lambda > -a$, $y_a(x, \lambda)$ n'a pas de racines dans l'intervalle $(a, 1)$. Dans le théorème I, nous pouvons évidemment prendre $y_a(x, \lambda)$ au lieu de $y_0(x, \lambda)$ et, dans le théorème II, $y_1(x, \lambda)$ au lieu de $y_a(x, \lambda)$. Si $\lambda_{n\pi} < \lambda' < \lambda_{(n+1)\pi}$, l'intégrale $y_0(x, \lambda')$ a n racines dans l'intervalle $(0, a)$, et, si $\lambda_{-n\pi} > \lambda'' > \lambda_{-(n+1)\pi}$, $y_a(x, \lambda'')$ a n racines dans l'intervalle $(a, 1)$.

3. Étudions maintenant la troisième condition, signalée à la fin du n° 1. Faisons le prolongement réel de l'intégrale $y_0(x, \lambda)$ à travers $x = a$, et soit

$$\gamma(\lambda)\, y_1(x, \lambda) \log(1-x) + \psi_1(x, \lambda)$$

son expression dans le voisinage du point $x = 1$. Nous désignerons par $y_0(x, \lambda)$ dans l'intervalle $(a, 1)$ le prolongement réel de $y_0(x, \lambda)$ à travers $x = a$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

La formule (6) était démontrée pour $x \leqq a$. Pour $x > a$ nous

avons

$$x(x-a)(x-1)\left[\frac{dy_0(x,\lambda)}{dx}y_{0\lambda}(x,\lambda)-\frac{dy_{0\lambda}(x,\lambda)}{dx}y_0(x,\lambda)\right]$$
$$=\int_a^x [y_0(x,\lambda)]^2\,dx+C,$$

où C est une constante. Elle est la limite de la première partie de cette formule, quand x tend vers a en décroissant. Mais cette limite sera la même si x tend vers a en croissant, c'est-à-dire

$$C=\int_0^a [y_0(x,\lambda)]^2\,dx,$$

et par suite la formule (6) est établie pour $x>a$. Elle nous montre, comme dans le paragraphe précédent, que $\gamma(\lambda)$ ne peut pas être égale identiquement à zéro, a ses racines simples et que, si $\gamma(\bar{\lambda})=0$, le signe de $\psi_1(1,\bar{\lambda})$ coïncide avec le signe de $\left[\frac{d\gamma(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\bar{\lambda}}$.

Soient $\bar{\lambda}$ et $\bar{\bar{\lambda}}$ deux racines consécutives de $\gamma(\lambda)$. Les intégrales $y_0(x,\bar{\lambda})$ et $y_0(x,\bar{\bar{\lambda}})$ sont holomorphes aux bouts $x=0$ et $x=1$, $y_0(0,\bar{\lambda})=y_0(0,\bar{\bar{\lambda}})=1$ et au bout $x=1$, les valeurs de ces intégrales $\psi_1(\varphi,\bar{\lambda})$ et $\psi_1(\varphi,\bar{\bar{\lambda}})$ sont de signes contraires, car $\left[\frac{d\gamma(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\bar{\lambda}}$ et $\left[\frac{d\gamma(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\bar{\bar{\lambda}}}$ sont de signes contraires. De là découle que l'intervalle $(\bar{\lambda},\bar{\bar{\lambda}})$ contient au moins une racine des équations (7) ou (8).

Prenons deux racines consécutives $\lambda_{n\pi}$ et $\lambda_{(n+1)\pi}$ de l'équation (7). Les valeurs $y_0(a,\lambda_{n\pi})$ et $y_0(a,\lambda_{(n+1)\pi})$ sont de signes contraires, et les intégrales $y_0(x,\lambda_{n\pi})$ et $y_0(x,\lambda_{(n+1)\pi})$ n'ont pas de racines dans l'intervalle $(a,1)$, car elles sont holomorphes au point $x=a$ et $\lambda_{(n+1)\pi}>\lambda_{n\pi}>-a$. Nous pouvons donc affirmer que $\gamma(\lambda_{n\pi})$ et $\gamma(\lambda_{(n+1)\pi})$ sont de signes contraires, c'est-à-dire que $\gamma(\lambda)$ a une racine dans l'intervalle $(\lambda_{n\pi},\lambda_{(n+1)\pi})$.

Considérons maintenant l'intervalle $(\lambda_{-(n+1)\pi},\lambda_{-n\pi})$. Une intégrale réelle quelconque $y(x,\lambda_{-k\pi})$, logarithmique aux bouts de l'intervalle $(a,1)$, a, dans cet intervalle, $(k+1)$ racines. Posons, en effet,

$$\eta(x,\lambda_{-k\pi})=\frac{y_a(x,\lambda_{-k\pi})}{y(x,\lambda_{-k\pi})},$$

et soient x_1 et x_{k-1} la première et la dernière racine de $y_a(x,\lambda_{-k\pi})$

dans l'intervalle $(a, 1)$. $\eta(x, \lambda_{-k\pi})$ est une fonction monotone de x et

$$\eta(a, \lambda_{-k\pi}) = \eta(1, \lambda_{-k\pi}) = 0.$$

Par conséquent, $y(x, \lambda_{-k\pi})$ a une racine dans l'intervalle (a, x_1) et une racine dans l'intervalle $(x_{k-1}, 1)$ et notre assertion est démontrée. Les intégrales $y_0(x, \lambda_{-n\pi})$ et $y_0(x, \lambda_{-(n+1)\pi})$ n'ont pas de racines dans l'intervalle $(0, a)$, la première a $(n+1)$ et la seconde $(n+2)$ racines dans l'intervalle $(a, 1)$, et par suite $\gamma(\lambda_{-n\pi})$ et $\gamma(\lambda_{-(n+1)\pi})$ sont de signes contraires, c'est-à-dire que $\gamma(\lambda)$ a une racine dans l'intervalle $(\lambda_{-(n+1)\pi}, \lambda_{-n\pi})$. D'une façon analogue, on peut démontrer que $\gamma(\lambda)$ a une racine dans l'intervalle $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{\pi})$; et nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème III. — Il existe une infinité de valeurs

$$\lambda = \lambda^{(n)} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\ldots < \lambda_{-(n+1)\pi} < \lambda^{(-n)} < \lambda_{-n\pi} < \ldots$$
$$< \lambda^{(-1)} < \lambda_{-\pi} < \lambda^{(0)} < \lambda_{\pi} < \lambda^{(1)} < \lambda_{2\pi} < \ldots < \lambda_{n\pi} < \lambda^{(n)} < \lambda_{(n+1)\pi} < \ldots,$$

telles que l'intégrale $y_0(x, \lambda^{(n)})$, prolongée réellement à travers $x = a$, sera holomorphe au point $x = 1$, et les $\lambda^{(n)} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont les seules racines réelles de l'équation

$$\gamma(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Les théorèmes I, II et III nous donnent toutes les valeurs réelles de λ, pour lesquelles Γ sera un groupe fuchsien.

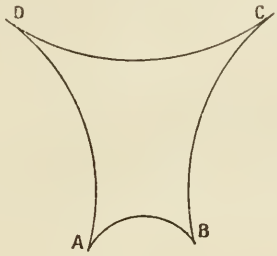
4. Soit $\eta(x, \lambda)$ le quotient des deux intégrales indépendantes de l'équation (1). Il transforme le demi-plan R, situé au-dessus de l'axe réel, en un quadrilatère K, simplement connexe, sans points de ramification, limité par quatre arcs des circonférences, qui se touchent successivement (*fig.* 1).

Nous dirons que le quadrilatère K correspond à l'équation (1). Inversement, à tout quadrilatère de la forme indiquée correspond une équation de la forme (1). Les sommets A, B, C et D correspondent aux points $x = 0$, a, 1 et ∞. Si nous avions choisi un autre quotient $\eta_1(x, \lambda)$, nous aurions le quadrilatère qui peut être déduit du précédent par une transformation linéaire $\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$.

Inversement, à deux quadrilatères qui peuvent être déduits l'un de l'autre par une telle transformation, correspond une même équation de la forme (1) ou les équations, dont les variables indépendantes sont liées par une transformation linéaire, et l'on peut toujours supposer que c'est le premier cas qui a lieu.

Posons par exemple $\eta(x, \lambda) = \frac{y_0(x, \lambda)}{y_0(x, \lambda)}$ et considérons le segment $(0, a)$ de l'axe réel du plan x, $\eta(0, \lambda) = 0$ et $\eta(x, \lambda)$ a les mêmes racines que $y_0(x, \lambda)$. De là découle que : si $\lambda < \lambda_1$, au segment $(0, a)$ correspond sur le plan $\eta(x, \lambda)$ l'arc, qui forme seulement une partie de la circonférence; si $\lambda = \lambda_{n\pi}$, au segment $(0, a)$

Fig. 1.



correspond la circonférence n fois répétée; si $\lambda_{n\pi} < \lambda < \lambda_{(n+1)\pi}$, à ce segment correspond la circonférence n fois répétée et un arc qui forme une partie de la circonférence. En vertu de la transformation (4) nous pouvons affirmer que les mêmes choses ont lieu pour le segment $(1, \infty)$.

Les cas analogues, $\lambda > \lambda_{-\pi}$, $\lambda = \lambda_{-n\pi}$ et $\lambda_{-n\pi} > \lambda > \lambda_{-(n+1)\pi}$, ont lieu pour les segments $(a, 1)$ et $(0, \infty)$. Ainsi les côtés de K ne sont superposés que si λ est contenu dans l'intervalle $\lambda_{-\pi} \leq \lambda \leq \lambda_{\pi}$. Nous appellerons cet intervalle « l'intervalle d'inversion uniforme A ».

Si λ appartient à cet intervalle, les côtés opposés de K ne peuvent se couper. Si, en effet, les côtés AB et CD par exemple se coupaient en un point M, la fonction $x = \varphi(\eta)$, inverse de la fonction $\eta(x, \lambda)$, serait holomorphe à l'intérieur du triangle AMD et multiforme sur le contour, mais c'est absurde. Dans ce cas on peut démontrer d'une façon analogue que le quadrilatère K est la partie du plan située à l'intérieur (ou à l'extérieur) du contour ABCDA.

Les sommets sont situés sur une même circonférence T. Si un des sommets est rejeté à l'infini, les côtés contigus à ce sommet sont les lignes droites parallèles, et T est aussi une ligne droite. En général, par le mot *circonférence*, nous désignons une circonférence réelle ou une ligne droite. L'orthogonalité de T et des côtés de K est la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe Γ soit fuchsien [1]. Si λ n'appartient pas à l'intervalle Λ, K est une surface à plusieurs feuillets sans point de ramification, et les deux côtés opposés sont superposés.

Si nous faisons le prolongement analytique de la fonction $\eta_1(x, \lambda)$ à travers l'un des segments de l'axe réel, nous aurons la transformation conforme du demi-plan R_1, situé au-dessous de l'axe réel, en un quadrilatère K_1, qui peut être déduit de K par une inversion par rapport au côté de K, correspondant au segment susdit. En faisant successivement le prolongement analytique de $\eta_1(x, \lambda)$ à travers tout le segment de l'axe réel, nous obtiendrons ainsi sur le plan $\eta_1(x, \lambda)$ le réseau des quadrilatères. Si la fonction inverse de la fonction $\eta_1(x, \lambda)$:

$$x = \varphi(\eta_1, \lambda). \tag{10}$$

est uniforme, deux quadrilatères adjacents quelconques forment la région fondamentale du groupe Γ, et le réseau est la région de discontinuité propre de ce groupe symétrique.

CHAPITRE II.

1. L'étude de x comme fonction de $\eta_1(x, \lambda)$ sera appelée le problème d'inversion de l'équation (1). Quand cette fonction (10) est uniforme, c'est une fonction automorphe, et son groupe est le groupe Γ. Ce cas ne peut se présenter que si λ appartient à l'intervalle Λ. En vertu de cette circonstance nous avons appelé cet intervalle « l'intervalle d'inversion uniforme ». Dans ce Chapitre, nous examinerons cet intervalle de plus près et supposerons toujours que λ appartient à Λ.

---

[1] *Voir* Klein und Fricke, *Theorie der automorphen Functionen*, t. II.

Posons par exemple

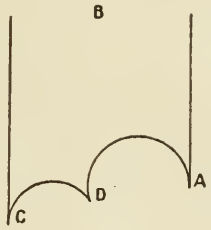
$$\eta(x, \lambda) = \frac{i y_0(x, \lambda)}{y_a(x, \lambda)}. \tag{11}$$

Les sommets A, B et C de K auront les coordonnées $\eta = 0$, $\eta = \infty$ et $\eta = \frac{\pi\alpha(\lambda)\beta(\lambda) + i\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}$. Le sommet D sera situé sur le segment AC, et sa coordonnée sera aussi fonction analytique de λ. Posons $\lambda = \lambda^{(0)}$. Tous les sommets seront situés sur l'axe réel, car $\gamma(\lambda^{(0)}) = 0$, cet axe étant orthogonal à tous les côtés de K, et la fonction (10), $x = \varphi(x, \lambda^{(0)})$ sera la fonction fuchsienne, pour laquelle l'axe réel est la ligne singulière. Faisons maintenant décroître λ et examinons l'intervalle A', défini par les inégalités

$$\lambda_{-\pi} \leqq \lambda \leqq \lambda^{(0)}.$$

Dans cet intervalle, $\alpha(\lambda) < 0$ et $\beta(\lambda) < 0$, $\lambda_{-\pi}$ excepté où $\beta(\lambda_{-\pi}) = 0$. Pour déterminer le signe de $\gamma(\lambda)$, remarquons que $y_0(x, \lambda_{-\pi})$ a, dans l'intervalle $(a, 1)$, une racine (Chap. I, n° 3) et est positif dans le voisinage du point $x = a$.

Fig. 2.

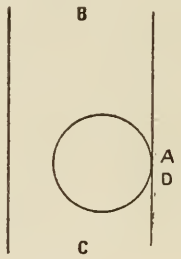


De là découle que $\gamma(\lambda_{-\pi}) > 0$ et par conséquent $\gamma(\lambda) > 0$ pour $\lambda_{-\pi} \leqq \lambda < \lambda^{(0)}$. Ainsi, si λ est contenu à l'intérieur de A', K aura la forme indiquée sur la figure 2. Si $\lambda = \lambda_{-\pi}$, nous aurons la figure 3. Dans ce cas, les sommets D et C coïncident avec les sommets A et B, et la fonction $x = \varphi(\eta, \lambda_{-\pi})$ sera une fonction fuchsienne, pour laquelle l'axe réel n'est pas une ligne singulière.

Les coordonnées des sommets C et D, les centres des arcs AD et CD et les rayons de ces arcs varient d'une façon continue avec λ. Les prolongements des côtés AD et BC ne peuvent pas se couper. Ceux des côtés CD et AB ne se coupent pas, si la valeur

de λ est assez voisine à $\lambda^{(0)}$, et se coupent certainement, si cette valeur est assez voisine à $\lambda_{-\pi}$. Dans le paragraphe suivant, nous démontrerons, qu'à deux valeurs différentes de λ correspondent aussi des valeurs différentes de l'angle φ sous lequel se coupent les prolongements des côtés CD et AB. Ainsi, l'intervalle A' se partage en deux parties $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{-(0)})$ et $(\lambda_{-(0)}, \lambda^{(0)})$. $\lambda = \lambda_{-(0)}$ correspondant au cas où les prolongements susdits se touchent. Si λ est contenu à l'intérieur de l'intervalle $(\lambda_{-(0)}, \lambda^{(0)})$, ces prolongements n'ont pas de points communs, mais, si λ décroît de $\lambda_{-(0)}$ à $\lambda_{-\pi}$, l'angle φ croît de o à π. Nous désignerons par $\lambda_{-(\varphi_0)}$ la valeur de λ, corres-

Fig. 3.



pondant à la valeur $\varphi = \varphi_0$. Les valeurs $\lambda_{-(\varphi)}$ $(o \leqq \varphi \leqq \pi)$ constituent l'intervalle $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{-(0)})$.

D'une façon analogue, l'intervalle A'', défini par l'inégalité $\lambda^{(0)} \leqq \lambda \leqq \lambda_{\pi}$, se partage en deux parties $(\lambda^{(0)}, \lambda_{(0)})$, $(\lambda_{(0)}, \lambda_{\pi})$, $\lambda = \lambda_{(0)}$ correspondant au cas où les prolongements des côtés BC et AD se touchent. Si λ se trouve à l'intérieur de l'intervalle $(\lambda^{(0)}, \lambda_{(0)})$, ces prolongements n'ont pas de points communs, et, si λ croît de $\lambda_{(0)}$ à λ_{π}, ils se coupent sous un angle ψ, qui croît constamment de o jusqu'à π. Si λ appartient à A'', les prolongements des côtés CD et AB n'ont pas de points communs.

Ainsi tout l'intervalle A se partage en trois parties : A_1, A_2 et A_3, définies respectivement par les inégalités : $\lambda_{-\pi} \leqq \lambda \leqq \lambda_{-(0)}$; $\lambda_{-(0)} < \lambda < \lambda_{(0)}$; $\lambda_{(0)} \leqq \lambda \leqq \lambda_{\pi}$. Si λ appartient à A_2, les prolongements des côtés du quadrilatère K n'ont pas de points communs. Cet intervalle contient la valeur $\lambda = \lambda^{(0)}$. Si λ appartient à A_1, les prolongements des côtés de K, correspondant aux segments (o, a) et $(1, \infty)$ de l'axe réel du plan x, se coupent et les prolongements des deux autres côtés ne se coupent pas. Inversement, si λ appar-

tient à Λ_3, les prolongements des côtés, correspondant aux segments $(a, 1)$ et $(\infty, 0)$, se coupent et les prolongements des deux autres côtés n'ont pas de points communs.

2. Nous démontrerons maintenant le théorème énoncé au paragraphe précédent.

Théorème IV. — A deux valeurs différentes de λ, appartenant à l'intervalle Λ, ne peuvent pas correspondre les mêmes valeurs de l'angle φ (ou ψ).

Pour ne pas interrompre l'exposition dans la suite, faisons auparavant deux remarques.

Première remarque. — S'il y a sur le plan deux triangles, chacun à un feuillet, limités par des arcs de circonférences, dont les sommets et les angles de ces sommets sont les mêmes, ces deux triangles se confondent. Cette assertion peut être démontrée soit par les considérations géométriques, soit par le lien qui existe entre de tels triangles et la théorie de l'équation différentielle de Gauss.

Deuxième remarque. — Deux équations différentielles linéaires du second ordre quelconques peuvent être ramenées l'une à l'autre par une transformation de la forme

$$(12) \qquad \begin{cases} x_1 = \omega(x), \\ y_1 = \omega_1(x) y, \end{cases}$$

et la fonction $\omega(x)$ peut être obtenue par l'élimination de η_1 des fonctions (10), correspondant aux équations données. Si cette fonction est linéaire, nous dirons que les équations données ne sont pas distinctes. Si, à deux équations de la forme (1), correspond un même quadrilatère K, et si, dans les deux cas, aux points $x = 0$, 1 et ∞ correspondent les mêmes sommets de K, l'élimination de η_1 nous conduit dans ce cas à la fonction $\omega(x)$, qui fait la représentation conforme du demi-plan sur lui-même, les points $x = 0$, 1 et ∞ restant fixes, c'est-à-dire que les deux équations données sont identiques.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème IV. Supposons qu'à deux valeurs $\lambda = \lambda'$ et λ'' corresponde une même

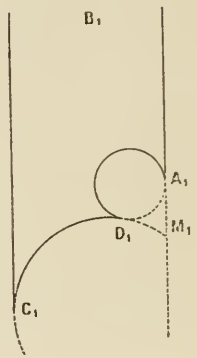
valeur de φ. Aux équations

$$(1_1)\qquad \frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda')y=0,$$

$$(1_2)\qquad \frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda'')y=0$$

correspondent les quadrilatères de la figure 4. Les triangles $A_1D_1M_1$

Fig. 4.



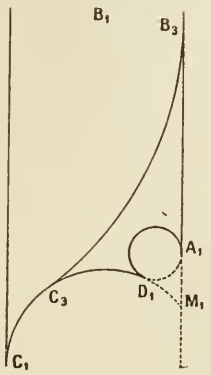
et $A_2D_2M_2$ ont les angles 0, 0 et φ. Transformons le plan du quadrilatère $A_2B_2C_2D_2$, en nous servant de la formule $\eta_1=\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$, et choisissons les coefficients de façon que le triangle $A_2D_2M_2$ coïncide avec le triangle $A_1D_1M_1$ (première remarque). Cette transformation est équivalente à un choix nouveau du quotient η_1 des intégrales de l'équation (1_2).

Soient K_1 le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, et K_2 le quadrilatère correspondant à l'équation (1_2), obtenu après la transformation. Représentons K_2 dans le plan de K_1. Le côté A_2D_2 coïncidera avec le côté A_1D_1, les côtés A_2B_2 et D_2C_2 viendront sur les côtés A_1B_1 et D_1C_1. Le sommet C_2 ne peut pas coïncider avec C_1 en vertu de la seconde remarque. Nous pouvons supposer que C_2 se placera sur le côté C_1D_1, car dans le cas où C_2 se placerait sur le prolongement de C_1D_1, nous aurions transformé non le quadrilatère $A_2B_2C_2D_2$, mais le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$. Nous obtiendrons ainsi la figure 5, où B_3 et C_3 sont les sommets B_2 et C_2 transformés.

L'élimination de x entre $\eta(x,\lambda')$ et $\eta_1(x,\lambda'')$ nous conduira à

la fonction $\eta_1 = \rho(\eta)$, faisant la représentation conforme de K_1 sur K_2, et, d'après cette transformation, les sommets A_3, B_3, C_3, D_1 correspondent respectivement aux sommets A_1, B_1, C_1, D_1. Faisons l'inversion de K_1 par rapport aux côtés A_1B_1, A_1D_1 et D_1C_1.

Fig. 5.



Nous obtiendrons ainsi une région E, composée de quatre quadrilatères. La fonction $\rho(\eta)$ est holomorphe dans E, les sommets exceptés, elle prend chacune de ses valeurs une fois et transforme E dans la partie, qui est composée de K_2 et de ses inverses par rapport aux côtés A_1B_3, A_1D_1 et D_1C_3. Ainsi les fonctions

$$\rho_1(\eta) = \rho(\eta); \qquad \rho_2(\eta) = \rho[\rho_1(\eta)]; \qquad \rho_3(\eta) = \rho[\rho_2(\eta)]; \qquad \ldots,$$
$$\rho_n(\eta) = \rho[\rho_{n-1}(\eta)]; \qquad \ldots$$

sont des fonctions holomorphes et limitées dans E et prennent chacune de leurs valeurs une fois.

En vertu du principe de M. Montel, on peut extraire de cette suite une suite convergeant vers une fonction limite $P(\eta)$. La convergence est uniforme dans chaque région, située à l'intérieur de E, et $P(\eta)$, holomorphe dans E, prend chacune de ses valeurs une fois ou est une constante [1]. Ce dernier cas ne peut pas se présenter, car les valeurs de $\rho_n(\eta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, si η est située sur les côtés A_1B_1 ou D_1C_1, sont situées respectivement sur les

[1] Caratheodory, *Math. Ann.*, t. 72. — Koebe, *Journal de Crelle*, t. 145. — Smirnoff, *Bulletin de la Société math. de Charkow*, 1917.

côtés A_1B_3 ou D_1C_3. La fonction $P(\eta_1)$ transforme l'axe A_1D_1 en lui-même, et deux cas seulement peuvent se présenter.

Premier cas. — Il existe sur l'arc A_1D_1 un point $\eta_1 = \eta_{10}$ tel que $\eta_{10} = P(\eta_{10})$. Nous ayons dans le voisinage de ce point

$$\rho(\eta_1) - \eta_{10} = a_1(\eta_1 - \eta_{10}) + a_2(\eta_1 - \eta_{10})^2 + \ldots,$$

où a_1 est un nombre réel et positif, et

$$\rho_n(\eta_1) - \eta_{10} = a_1^n(\eta_1 - \eta_{10}) + \ldots.$$

De là découle que $a_1 = 1$, car dans le cas contraire $\lim_{n=\infty} \rho'_n(\eta_{10}) = 0$ ou ∞, mais c'est absurde, car, nous avons vu que la fonction limite $P(\eta_1)$ est holomorphe à l'intérieur de E et prend chacune de ses valeurs une fois [1]. Nous avons ainsi

$$\rho(\eta_1) - \eta_{10} = (\eta_1 - \eta_{10}) + a_k(\eta_1 - \eta_{10})^k + \ldots \qquad (k > 1),$$

où a_k est le premier coefficient après a_1, distinct de zéro. Ce coefficient se présentera certainement, car dans le cas contraire K_1 et K_2 coïncideraient. Pour $\rho_n(\eta_1)$ nous avons

$$\rho_n(\eta_1) - \eta_{10} = (\eta_1 - \eta_{10}) + n a_k(\eta_1 - \eta_{10})^k + \ldots,$$

c'est-à-dire $\lim_{n=\infty} \rho_n^{(k)}(\eta_{10}) = \infty$, mais c'est absurde, et nous pouvons affirmer que le premier cas ne peut pas se présenter.

Deuxième cas. — Quand le point η_1 décrit l'arc DA dans un sens, le point $\rho(\eta_1)$, décrivant le même arc dans le même sens, se trouve toujours en avant ou en arrière du point η_1. Prenons à l'intérieur de l'arc AD un point $\eta_1 = \eta_{10}$ et soit $\eta_{1n} = \rho_n(\eta_{10})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Les points $\eta_{10}, \eta_{11}, \eta_{12}, \ldots$ sont situés sur l'arc AD l'un d'après l'autre et ils tendent par suite vers un point déterminé η_1'. La fonction $\rho(\eta_1)$ transforme l'arc $\eta_{10}\eta_{11}$ en $\eta_{11}\eta_{12}$, ce dernier en $\eta_{12}\eta_{13}, \ldots$. De là découle, par exemple, que

$$P(\eta_{10}) = P(\eta_{11}) = P(\eta_{12}) = \ldots = \eta_1',$$

mais nous avons vu que la fonction $P(\eta_1)$ ne peut prendre chacune

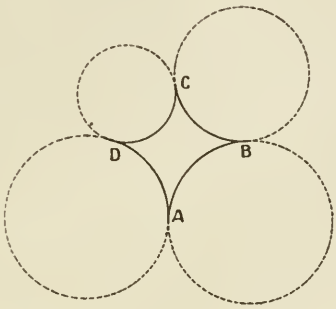
---

[1] Les dérivées de la fonction limite sont les limites des dérivées des fonctions, qui tendent vers la fonction limite.

de ses valeurs qu'une fois. Ainsi le deuxième cas ne peut pas non plus se présenter et le théorème IV est démontré.

3. Considérons maintenant le groupe Γ et le problème d'inversion de l'équation (1). Supposons d'abord que λ appartienne à l'intervalle A_2. Le quadrilatère K aura la forme signalée sur la figure 6. Les inversions successives des quadrilatères par rapport

Fig. 6.



à ses côtés donneront toujours des quadrilatères nouveaux, et le réseau de ces quadrilatères formera une région simplement connexe Λ, limitée par une courbe L. Si $\lambda = \lambda^{(0)}$, cette courbe sera la circonférence; dans les autres cas ce sera une courbe non analytique. Dans le premier cas la fonction (10) sera une fonction fuchsienne et dans les autres cas ce sera une fonction kleinéenne avec la ligne singulière L.

Le groupe Γ contiendra les substitutions paraboliques, hyperboliques et loxodromiques, le cas $\lambda = \lambda^{(0)}$ excepté. Dans ce dernier cas, les substitutions loxodromiques manquent. Il n'existe aucune relation entre les substitutions du groupe Γ [1].

Faisons l'inversion de K par rapport à son côté CD, et soient A′ et B′ les images des sommets A et B. Nous obtiendrons ainsi l'hexagone ABCA′B′DA, qui est la région fondamentale du groupe Γ. Les côtés AB et A′B′ sont liés par la substitution $\sigma = S_3^{-1} S_2^{-1}$, où S_2 et S_3 sont les substitutions, correspondant aux circuits autour des points $x = a$ et $x = 1$, sortant d'un point du demi-plan R, et σ est la substitution hyperbolique.

---

[1] *Voir* Klein und Fricke, *Theorie der automorphen Funct.*, t. I.

Examinons maintenant l'intervalle Λ_1. Le cas $\lambda = \lambda_{-\pi}$ a été déjà considéré. Dans ce cas, la forme de K est signalée sur la figure 3, la fonction (10) est la fonction fuchsienne sans la circonférence singulière, et σ est la substitution identique.

Les inversions successives de K donneront toujours des quadrilatères nouveaux, si nous comptons les inversions par rapport aux côtés AB et CD comme une même inversion. Par conséquent, toutes les relations entre les substitutions du groupe Γ sont, dans ce cas, des conséquences de la relation $S_2 S_3 = 1$.

Prenons encore, dans l'intervalle Λ_1, la valeur $\lambda = \lambda_{-(0)}$. Dans ce cas, A est une région simplement connexe, limitée par une infinité de circonférences, la fonction (10) est une fonction kleinéenne, σ est la susbtitution parabolique et il n'existe aucune relation entre les substitutions du groupe Γ.

Examinons enfin le cas général. La fonction (10) ne peut être uniforme que si $\varphi = \frac{\pi}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda_{-\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. Dans ce cas, A est la région à connexion infinie, limitée par une infinité de circonférences, la fonction (10) est une fonction kleinéenne, et σ est une substitution elliptique de la période n. Si nous transformons l'hexagone ABCA'B'DA par les substitutions $\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}$, nous obtenons une région annulaire, limitée par $2n$ arcs de circonférences. Les inversions successives de cette région donneront toujours de nouvelles régions annulaires, et nous pouvons par conséquent affirmer que toutes les relations entre les substitutions du groupe Γ sont des conséquences de la relation $(S_2 S_3)^n = 1$.

L'intervalle Λ_3 présente les mêmes circonstances que Λ_1. La fonction (10) est uniforme, si $\lambda = \lambda_\pi$, $\lambda_{+(0)}$ ou $\lambda_{-\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Au lieu des côtés AB et CD, il faut considérer les côtés BC et AD et au lieu de la substitution σ la substitution $\tau = S_2^{-1}, S_1^{-1}$ où S_1 correspond au circuit autour du point $x = 0$.

Les considérations précédentes nous conduisent au théorème suivant :

Théorème V. — Il existe une valeur $\lambda = \lambda^{(0)}$, pour laquelle la fonction (10) est une fonction fuchsienne avec une circonférence singulière. Il existe deux valeurs $\lambda_{-(0)}$ et $\lambda_{(0)}$ telles, que $\lambda_{-(0)} < \lambda^{(0)} < \lambda_{(0)}$, et, si λ appartient à l'intervalle $(\lambda_{-(0)}, \lambda_{(0)})$,

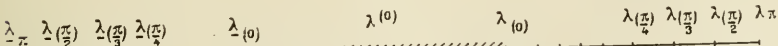
$\lambda = \lambda^{(0)}$ excepté, la fonction (10) est une fonction kleinéenne avec un domaine d'existence limité par une courbe non analytique L. Si $\lambda = \lambda_{-(0)}$ ou $\lambda_{(0)}$, elle est une fonction kleinéenne avec un domaine d'existence simplement connexe, limité par une infinité de circonférences. Il existe deux valeurs $\lambda = \lambda_\pi > \lambda_{(0)}$ et $\lambda = \lambda_{-\pi} < \lambda_{-(0)}$, pour lesquelles la fonction (10) est une fonction fuchsienne sans circonférence singulière, et les relations suivantes ont lieu :

$$S_2 S_3 = 1 \quad (\lambda = \lambda_{-\pi}); \qquad S_1 S_2 = 1 \quad (\lambda = \lambda_\pi).$$

Dans l'intervalle $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{-(0)})$ il existe une infinité de valeurs croissantes $\lambda_{-(\frac{\pi}{2})}, \lambda_{-(\frac{\pi}{3})}, \lambda_{-(\frac{\pi}{4})}, \ldots$, tendant vers $\lambda_{-(0)}$ et telles que, si $\lambda = \lambda_{-(\frac{\pi}{n})}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, la fonction (10) est une fonction kleinéenne avec un domaine d'existence à connexion infinie, limité par une infinité de circonférences, et le groupe Γ contient des substitutions elliptiques de période n. Ces substitutions ont la forme $S(S_2 S_3)^k S^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, où S est une substitution arbitraire du groupe Γ.

Dans l'intervalle $(\lambda_{(0)}, \lambda_\pi)$, il existe une infinité de valeurs croissantes $\lambda_{(\frac{\pi}{2})}, \lambda_{(\frac{\pi}{3})}, \lambda_{(\frac{\pi}{4})}, \ldots$, tendant vers $\lambda_{(0)}$ et telles que si $\lambda = \lambda_{(\frac{\pi}{n})}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, la fonction (10) est une fonction kleinéenne avec un domaine d'existence ayant les mêmes propriétés que dans le cas $\lambda = \lambda_{(\frac{\pi}{n})}$, et le groupe Γ contient les substitutions elliptiques $S(S_1 S_2)^k S^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ de période n. Les cas mentionnés épuisent tous les cas où la fonction (10) est uniforme.

Fig. 7.



Nous indiquons sur la figure 7 les valeurs susdites de λ.

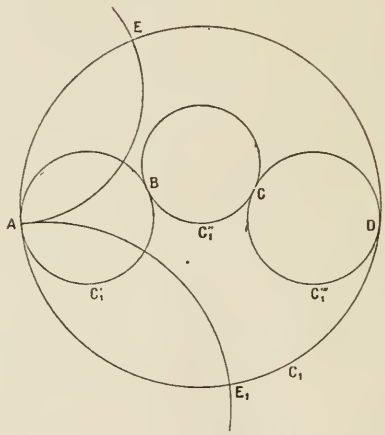
CHAPITRE III.

1. Dans ce Chapitre, nous examinerons de plus près le groupe Γ. Si λ appartient à l'intervalle Λ_2, les prolongements des côtés de K

forment le nouveau quadrilatère K′, que nous appellerons le « quadrilatère complémentaire ». On peut toujours supposer que le point $n = \infty$ se trouve à l'intérieur de K′ (*fig.* 6). Si nous faisons l'inversion de K et K′ par rapport à ses côtés, nous obtenons deux réseaux des quadrilatères, séparés par douze cercles. Si nous faisons encore l'inversion par rapport aux côtés, situés sur ces cercles, nous obtenons deux réseaux de quadrilatères, séparés par trente-six cercles, etc. Nous obtiendrons ainsi à la limite deux réseaux A et B, séparés par une courbe L. Si $\lambda = \lambda^{(0)}$, L est une circonférence, et dans les autres cas ce sera une courbe de Jordan non analytique ([1]).

Cette courbe est la limite de chaînes de cercles tangents successivement. Chaque chaîne fait la partie de la précédente, chaque cercle C_1 étant remplacé par les trois cercles C_1', C_1'' et C_1''', comme l'indique la figure 8. Nous voulons démontrer que les aires

Fig. 8.



des chaînes tendent vers zéro, c'est-à-dire que la région A est une région quarrable.

En faisant un nombre quelconque d'inversions, nous remplaçons le cercle C_1', par exemple par une chaîne de cercles avec les extrémités A et B. Nous démontrerons qu'il existe un nombre positif $q < 1$, tel que le rapport des aires de cette chaîne et du cercle C_1'

([1]) KLEIN und FRIKE, *Theorie der autom. Funct.*, t. 1.

soit inférieur à q après un nombre assez grand d'inversions. La transformation $\eta_1 = a\eta + b$ ne change pas ce rapport, et par suite nous pouvons supposer que le point A a la coordonnée $\eta = 0$, que la ligne des centres de C_1 et C'_1 est l'axe réel, et que le diamètre de C_1 est égal à 1. Menons par le point A deux circonférences C' et C'', orthogonales à la circonférence C'_1, qui découpent le quart de cette circonférence. Nous obtenons ainsi les triangles ADE et AD_1E_1 (*fig.* 8). Démontrons que les cercles C''_1 et C'''_1 ne peuvent pas avoir de points communs avec ces deux triangles. Soit $\frac{1}{m}$ $(m > 1)$ le diamètre du cercle C'_1. Faisons la transformation $\eta_1 = \frac{1}{\eta}$, et soit $\eta_1 = \eta'_1 + i\eta''_1$.

Les circonférences C_1, C'_1, C' et C'' seront sur le plan η_1 des lignes droites $\eta'_1 = 1$, $\eta'_1 = m$, $\eta''_1 = -m$, $\eta''_1 = m$. Les cercles C''_1 et C'''_1 doivent se placer à l'intérieur de la bande limitée par les lignes droites $\eta'_1 = 1$ et $\eta'_1 = m$, et par conséquent leurs diamètres sont moindres que $(m - 1)$. Mais les triangles ADE et AD_1E_1 sur le plan η_1 sont des parties de la bande susindiquée, situées au-dessus de la ligne $\eta''_1 = m$ et au-dessous de la ligne $\eta''_1 = -m$, et, par suite, les cercles C''_1 et C'''_1 ne peuvent pas avoir de points communs simultanément avec ces deux triangles.

Supposons, par exemple, que le triangle ADE (*fig.* 8) n'ait pas de points communs avec C''_1 et C'''_1. En faisant un nombre suffisant d'inversions par rapport à des circonférences passant par le point A, nous pouvons remplir par des quadrilatères du réseau B une partie arbitrairement grande de la lunule AD et, par conséquent, pour le cercle C'_1, nous pouvons prendre, pour le nombre q dont nous voulons démontrer l'existence, un nombre q_0, qui satisfasse à l'inégalité $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} < q_0 < 1$, car l'aire de la lunule est égale à $\frac{\pi}{2} - 1$. Le même nombre q_0 convient aussi pour le cercle C'''_1.

Considérons maintenant le cercle C''_1. En faisant une inversion par rapport à ce cercle, nous obtiendrons à l'intérieur trois cercles. A deux de ces cercles, analogues à C'_1 et C'''_1, sont applicables les raisonnements précédents. En faisant l'inversion par rapport au troisième cercle, nous obtiendrons encore trois cercles, etc. Il est évident que les aires des cercles, situés au milieu, tendent vers zéro, et par suite nous pouvons affirmer que le nombre q_0 vaut aussi pour le

cercle C''_1. De l'existence de ce nombre q_0 découle immédiatement que les aires des chaînes des cercles, c'est-à-dire les sommes des carrés des rayons des cercles composant les chaînes, tendent vers zéro.

2. Toute équation de la forme (1) est entièrement déterminée, si l'on a donné les valeurs de a et λ, et nous désignerons une telle équation par le symbole $[a, \lambda]$, en supposant toujours a et λ réels et $0 < a < 1$.

Si le changement de variables de la forme

$$(13) \qquad x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y_1 = \omega_1(x) y$$

transforme l'équation $[a, \lambda]$ en une équation de même forme, l'équation transformée est aussi $[a, \lambda]$ ou $[1 - a, -(1 + \lambda)]$, et l'on peut supposer que α, β, γ et δ sont réels. Si $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, les quadrilatères, correspondant aux équations liées par la transformation (13), sont liés par une transformation linéaire. Si $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, ces quadrilatères sont liés par une transformation linéaire de la seconde espèce, c'est-à-dire par une transformation de la forme $\eta_1 = \frac{a\bar{\eta}_1 + b}{c\bar{\eta}_1 + d}$, où $\bar{\eta}_1$ est la quantité imaginaire conjuguée de η_1. Les assertions inverses sont aussi évidemment exactes. Dans le cas $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, le quadrilatère, correspondant à une équation, est lié par une transformation linéaire de la première espèce avec chaque quadrilatère, adjacent au quadrilatère qui correspond à l'autre équation. En considérant les valeurs de x et x_1, correspondant aux sommets des quadrilatères, et la correspondance entre ces sommets, on peut trouver facilement la substitution $x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha x + \delta}$ et la forme de l'équation transformée, ce que nous ferons dans la suite.

Revenons maintenant à la considération des quadrilatères K et K', et soient $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$ les équations correspondantes. Nous supposons toujours que les sommets A, C et D des deux quadrilatères correspondent aux valeurs $x = 0$, 1 et ∞, et par conséquent K' est la représentation conforme du demi-plan R_1, situé au-dessous de l'axe réel. Nous appellerons $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$ les équations correspondantes. Si nous faisons varier λ, b et μ

varieront aussi. Démontrons qu'à deux valeurs différentes de λ ne peut pas correspondre une même valeur de b.

Supposons, au contraire, que $[a, \lambda']$, $[b, \mu']$ et $[a, \lambda'']$, $[b, \mu'']$ soient deux paires d'équations correspondantes. Soient η le quotient des intégrales des équations $[a, \lambda']$ et $[b, \mu']$, K et K′ les quadrilatères correspondants, A et B les réseaux des quadrilatères sur le plan η, et L le contour de ces réseaux (*voir* n° 1). Si nous faisons n inversions de K et K′ par rapport aux côtés libres, nous obtiendrons une chaîne, qui se compose de 4.3^n cercles. Soient $C_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, 4.3^n)$ les circonférences de ces cercles, $\rho_n^{(k)}$ leurs rayons et δ_n, δ'_n et δ''_n le contour de cette chaîne et les parties contenues respectivement dans A et B. Soient enfin $\overline{\eta}$ le quotient des intégrales des équations $[a, \lambda'']$ et $[b, \mu'']$ et $\overline{K}$, $\overline{K'}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{L}$, $\overline{C_n^{(k)}}$, $\overline{\rho_n^{(k)}}$, $\overline{\delta_n}$, $\overline{\delta'_n}$ et $\overline{\delta''_n}$ les quantités analogues aux précédentes pour le point $\overline{\eta}$. L'élimination de x nous conduit à deux fonctions $\overline{\eta} = \varphi(\eta)$ et $\overline{\eta} = \psi(\eta)$, qui transforment K et K′ dans $\overline{K}$ et $\overline{K'}$, les sommets de K et K′ correspondant aux sommets de $\overline{K}$ et $\overline{K'}$. Par conséquent, ces fonctions sont analytiques respectivement dans A et B, les transforment en $\overline{A}$ et $\overline{B}$, ont les mêmes valeurs sur L et la transforment en $\overline{L}$. Soit $\overline{\eta} = \Phi(\eta)$ la fonction qui, dans A, se confond avec $\varphi(\eta)$, dans B avec $\psi(\eta)$ et prend sur L les valeurs communes de $\varphi(\eta)$ et $\psi(\eta)$. $\Phi(\eta)$ est holomorphe à l'intérieur de A et B, un pôle excepté, contenu dans K′, et fait une transformation continue du plan en lui-même. Soit η_0 un point quelconque, contenu à l'intérieur de K. Il est évident que

$$(14) \qquad \int_{\delta_0} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0}\, d\eta = \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0}\, d\eta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mais nous avons

$$\int_{\delta_n} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0}\, d\eta = \sum_{k=1}^{4.3^n} \int_{C_n^{(k)}} \frac{\Phi(\eta) - \Phi(\eta_n^{(k)})}{\eta - \eta_0}\, d\eta,$$

où $\eta_n^{(k)}$ est un point quelconque fixe sur $C_n^{(k)}$. Par suite,

$$\left| \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0}\, d\eta \right| \leqq \frac{2\pi}{\rho} \sum_{k=1}^{4.3^n} \overline{\rho}_n^{(k)}\, \rho_n^{(k)} \leqq \frac{\pi}{\rho} \sum_{k=1}^{4.3^n} \left(\rho_n^{(k)\,2} + \overline{\rho}_n^{(k)\,2} \right.$$

où ρ est la distance minimum de τ_{10} au contour δ_0 (et par suite $\rho \leqq$ la distance de τ_{10} au contour δ_n).

Nous avons démontré que

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{4.3^n} \rho_n^{(k)2} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{4.3^n} \bar{\rho}_n^{(k)2} = 0,$$

mais la première partie de la formule (14) ne dépend pas de n, et par suite

$$(15) \qquad \int_{\delta_0} \frac{\Phi(\tau_1)}{\tau_1 - \tau_{10}} d\tau_1 = \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\tau_1)}{\tau_1 - \tau_{10}} d\tau_1 = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

En vertu de cette formule, nous pouvons écrire

$$\Phi(\tau_{10}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_0'} \frac{\Phi(\tau_1)}{\tau_1 - \tau_{10}} d\tau_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_0''} \frac{\Phi(\tau_1)}{\tau_1 - \tau_{10}} d\tau_1,$$

c'est-à-dire que la fonction $\varphi(\tau_1)$ est prolongeable à travers la ligne L, les sommets de K, peut-être, exceptés. D'une manière analogue, on peut démontrer que la fonction $\psi(\tau_1)$ est aussi prolongeable. Mais les valeurs de ces fonctions sur L se confondent, et par conséquent on peut affirmer que $\Phi(\tau_1)$ est analytique sur tout le plan, les sommets de K, peut-être, exceptés. Mais, en ces sommets, elle est continue et par suite aussi holormorphe. Ainsi $\Phi(\tau_1)$ est analytique sur tout le plan et le transforme dans lui-même. Par conséquent $\bar{\tau}_1 = \frac{\alpha\tau_1 + \beta}{\gamma\tau_1 + \delta}$, et il est aisé de démontrer que l'équation $[a, \lambda'']$ doit coïncider avec $[a, \lambda']$, c'est-à-dire $\lambda'' = \lambda'$, mais cela contredit l'hypothèse.

Considérons, par exemple, l'équation $[a, \lambda^{(0)}]$, K' peut être déduit de K par une inversion par rapport à la circonférence, qui passe par les sommets de K et K', et un quadrilatère K'_1 quelconque, adjacent à K', peut être déduit de K par la transformation linéaire, et l'équation correspondant à $[a, \lambda^{(0)}]$ sera l'équation $[a, \lambda^{(0)}]$ elle-même.

Supposons maintenant que les équations correspondantes soient $[a, \lambda]$ et $[1 - a, \mu]$. Transformons l'équation $[1 - a, \mu]$ par une transformation (13), en prenant $x_1 = 1 - x$, en l'équation $[a, -(1 + \mu)]$. En éliminant les variables indépendantes, nous obtiendrons la fonction $\bar{\tau}_1 = \varphi(\tau_1)$, qui transforme K' en K, et la

fonction $\bar{\eta} = \psi(\eta)$, qui transforme K en K', de manière que les sommets A, B, C et D correspondent aux sommets C, B, A et D. La fonction $\varphi(\eta)$ transforme B en A et $\varphi(\eta)$ transforme A en B. En répétant la démonstration du présent paragraphe, on peut démontrer que $\varphi(\eta)$ et $\psi(\eta)$ sont la même fonction linéaire $\bar{\eta} = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$. Par conséquent, l'équation $[a, -(1+\mu)]$ doit coïncider avec $[a, \lambda]$, l'équation $[1-a, \mu]$ doit être liée à l'équation $[a, \lambda]$ par une transformation de la forme (13) et $\mu = -(1+\lambda)$.

Dans le paragraphe suivant, nous démontrerons que si $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$ sont des équations correspondantes, et si λ varie de $\lambda_{-(0)}$ à $\lambda_{(0)}$, b et μ sont des fonctions continues de λ, et b varie de 1 à 0. Des considérations du présent paragraphe découle immédiatement que b est une fonction monotone de λ, et par suite l'équation $[b, \mu]$ peut être liée à l'équation $[a, \lambda]$ par une transformation de la forme (13) seulement dans deux cas : quand $\lambda = \lambda^{(0)}$ et quand $b = 1 - a$. Dans le premier cas, $b = a$. Ces deux cas se confondent si $a = \frac{1}{2}$.

3. Faisons d'abord une remarque. Si nous opérons une transformation de la fonction dans l'équation (1), en posant $y = \frac{z}{\sqrt{p(x)}}$, où $p(x) = x(x-a)(x-1)$, cette équation prendra la forme

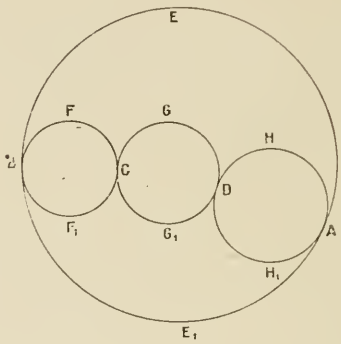
$$(\quad) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{4(x+\lambda)p(x) + [p'(x)]^2 - 2p''(x)p(x)}{4[p(x)]^2} z = 0.$$

D'un théorème connu de Sturm, on peut conclure facilement qu'il existe deux nombres fixes m' et m'', indépendants de a, tels, que toute intégrale de l'équation (16) a au moins une racine dans l'intervalle $(0, a)$, si $\lambda > m'$, et dans l'intervalle $(a, 1)$ si $\lambda < m''$, c'est-à-dire que l'intervalle d'inversion uniforme A reste toujours à l'intérieur de l'intervalle fixe (m'', m').

Revenons maintenant à la considération des équations correspondantes, $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$. Si nous posons $\eta = \frac{i y_0(x, \lambda)}{y_a(x, \lambda)}$, comme au n° 1 du Chapitre II, K et K' se trouvent à l'intérieur d'une bande de largeur $-\pi\alpha(\lambda)$, dont un des côtés est l'axe imagi-

naire. Si λ varie dans l'intervalle Λ_2, on peut évidemment trouver une partie du plan η qui n'appartienne ni à K ni à K', ni aux quadrilatères adjacents, et en faisant une transformation linéaire convenable du plan η avec des coefficients constants, nous pouvons affirmer que K et K' se trouvent à l'intérieur d'une circonférence fixe, et que les quadrilatères adjacents sont à distance finie, λ variant dans l'intervalle Λ_2 (*fig.* 9). Ainsi, sur la figure 9, les

Fig. 9.



côtés AEB et AE_1B et les sommets A et B sont fixes, les coordonnées des autres sommets sont des fonctions analytiques de λ.

Supposons maintenant que λ, variant dans l'intervalle Λ_2, tende vers une valeur λ', distincte de λ_0 et $\lambda_{-\infty}$. A cette valeur λ' correspondent une position déterminée de K et K' et des valeurs déterminées $b = b'$ et $\mu = \mu'$. Nous désignerons par A', B', ... les points de la figure 9 pour le cas $\lambda = \lambda'$.

(*A suivre.*)

1ère Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DRZEWIECKI (S.). — Théorie générale de l'hélice. *Hélices aériennes et hélices marines.* 1 vol. in-8°, XII-184 pages, avec 43 figures dans le texte, 9 planches et 4 tables hors texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920.

Le Livre que nous présente M. S. Drzewiecki, au sujet de l'hélice, est le fruit de longues et minutieuses études expérimentales effectuées par un vrai technicien, qui a introduit successivement les diverses hypothèses qu'il a été amené à faire, après les avoir solidement étayées sur des faits. On sait que l'aviation doit à M. S. Drzewiecki d'excellentes hélices, d'un rendement rationnel. Nous pouvons donc avoir toute confiance dans la valeur de son exposé théorique.

Ce dernier est conçu de manière à pousser aussi loin que possible, jusqu'à l'application numérique précise, les conséquences de l'hypothèse suivante : chaque élément de l'aile d'une hélice peut être considéré comme se comportant à la façon d'un élément de planchette exposé à un courant d'air, et subissant par conséquent une résistance fournie par la formule générale

$$R_i = K_i S W^2,$$

dans laquelle W désigne la vitesse relative du vent par rapport à cet élément, S sa surface, et K_i le coefficient bien connu, qui dépend de l'incidence i du vent relatif, de l'épaisseur de l'élément, de sa forme et de l'état de sa surface. Cette résistance R_i se décompose en deux parties : la *poussée utile* R_y normale à la trajectoire réelle de l'élément, et la *traînée*, ou résistance nuisible R_x, dirigée parallèlement à cette trajectoire. Le rapport

$$\frac{R_y}{R_x} = \cot\theta = \frac{1}{\mu}$$

caractérise la *finesse* de l'aile, c'est-à-dire sa facilité de pénétration dans le fluide.

L'hypothèse ainsi admise, qui sert de point de départ, va être utilisée par l'auteur jusque dans ses dernières conséquences. Elle ne permet évidemment pas de faire la théorie rigoureuse de l'hélice par l'application des équations classiques de la mécanique des fluides, où il est impossible de séparer les uns des autres les éléments du corps étudié, chaque élément influençant tous les autres et ne pouvant être isolé pour fournir une part, bien déterminée à l'avance, de l'effet total. Pourtant, du point de vue pratique, la théorie ainsi constituée sera cependant satisfaisante et rendra un compte suffisamment approché des faits, d'autant qu'à aucun moment l'auteur ne perdra de vue la réalité et mettra constamment ses formules en accord avec l'expérience.

Si l'on désigne par $\omega\,(=2\pi n)$ la vitesse angulaire autour de l'axe, d'un élément de l'hélice, situé à la distance r de cet axe, par l la largeur de cet élément, par V la vitesse d'avancement de l'hélice parallèlement à l'axe, par $z = \operatorname{tang}\beta$ le rapport $\frac{\omega r}{V}$ $\left(\text{la quantité } \mathfrak{M} = \frac{V}{\omega} \text{ est le } \textit{module}\right)$, l'auteur, partant des hypothèses précédentes, calcule aisément les puissances élémentaires utile ou motrice : la puissance utile correspond au travail effectué dans le sens de l'axe, la puissance motrice est celle absorbée pour vaincre le couple résistant autour de l'axe dans la rotation de vitesse angulaire ω. On trouve

$$dP_u = \frac{V^3}{\omega} K_y\, l\,(z - \mu)\sqrt{1 + z^2}\, dz,$$

$$dP_m = \frac{V^3}{\omega} K_y\, l\,(1 + \mu z)\sqrt{1 + z^2}\, z\, dz,$$

d'où le rendement de l'élément

$$\rho = \frac{dP_u}{dP_m} = \frac{z - \mu}{(1 + \mu z)\, z}.$$

Il y a lieu, naturellement, de chercher à avoir un rendement aussi élevé que possible ; pour cela, il est important de donner, au coefficient de finesse μ, la valeur la plus petite compatible avec les exigences de la résistance des matériaux. D'autre part, le rendement est d'autant meilleur que l'élément est plus voisin du moyeu : après avoir passé par un maximum dans une région très voisine du moyeu, il décroît rapidement quand on s'en éloigne. Il est donc

bon de ne pas prendre d'ailes trop grandes. En pratique, pour ces raisons, on utilise des hélices aériennes d'un rayon correspondant à $z = 3$ à 6, et des hélices marines correspondant à $z = 2$ à 5. La théorie sera faite, pour faciliter le calcul, en prenant une fois pour toutes r variant de $\frac{R}{5}$ à R, en désignant par R le rayon de l'aile (on posera $Z = \mathfrak{M} R$).

Chaque hélice sera calculée pour fonctionner dans certaines conditions définies par le *module de construction* $\mathfrak{M}$. Il faudra s'attacher à ce que le *module de fonctionnement* en soit aussi voisin que possible.

Pour réaliser une hélice, il faudra juxtaposer les uns aux autres un grand nombre d'éléments analogues à celui envisagé primitivement ci-dessus. Cette juxtaposition peut se faire de bien des manières, chaque élément ayant sa largeur propre, son incidence propre, son pas H particulier $\left[\text{on a par définition } H = \frac{V}{n} \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}(\beta - i)}\right]$. Il devient naturel d'envisager des hélices à *pas constant*, et des hélices à *inclinaison constante*. L'auteur examine successivement ces différents cas, et il se propose de faire la détermination effective de l'hélice pratique de l'hélice, en supposant connu le module de construction $\mathfrak{M}$ et la puissance motrice que devra absorber l'hélice (ou encore la puissance utile à produire). On suppose d'abord, pour le calcul pratique, que la largeur l de tous les éléments est constante (l'influence de cette largeur supposée variable sera examinée ultérieurement, et sera trouvée très faible). Avec diverses simplifications logiquement très acceptables, l'auteur parvient à l'expression globale de la puissance utile et de la puissance motrice de l'hélice *à incidence constante*

$$P_u = \frac{a V^5 K_y Z}{\varepsilon (2\pi)^2 n^2} [I_2 - \mu I_1],$$

$$P_m = \frac{a V^5 K_y Z}{\varepsilon (2\pi)^2 n^2} [I_2 + \mu I_3];$$

I_n désigne l'intégrale

$$I_n = \int_{0,2Z}^{Z} z^{n-1} \sqrt{1 + z^2}\, dz,$$

dont, dans toute la suite, M. Drzewiecki fait un usage constant et très opportun ; a désigne le nombre d'ailes de l'hélice, ε est un

coefficient numérique, égal à 6 pour les hélices aériennes, à 3 pour les hélices marines. De là on tire le rendement

$$\rho = \frac{1 - \mu \frac{I_1}{I_2}}{1 + \mu \frac{I_3}{I_2}}.$$

L'auteur discute ces formules et montre, dans la pratique des calculs, une extrême habileté et une grande élégance. A noter la simplification fort judicieuse qui est tirée de l'emploi du logarithme du *rapport* Q *de comptabilité*, $Q = Z(I_2 + \mu I_3)$. Des abaques et des tables rendent les applications numériques tout à fait faciles.

Les hélices à pas constant sont ensuite étudiées; les calculs sont sensiblement plus compliqués que dans le cas de l'incidence constante, mais les résultats numériques sont extrêmement voisins. Il en est de même si l'on admet que la largeur l des éléments soit variable (de façon, évidemment, à donner des profils naturels tels que ceux adoptés dans la pratique courante). Les valeurs obtenues pour le rendement sont si pratiquement semblables que la conclusion s'impose d'établir tous les projets d'hélices en admettant l'incidence constante et la largeur constante, quitte à tenir compte ensuite des nécessités de la construction pour modifier ces éléments. Parmi les résultats pratiques obtenus, notons que le « rayon caractéristique » de l'hélice est environ les trois quarts du rayon maximum.

Après ces développements extrêmement utiles et clairement exposés, l'auteur nous montre les effets de la perturbation apportée par une aile d'hélice dans le fluide qu'elle traverse; ce trouble vient modifier, en abaissant le rendement, la façon dont se comporte une seconde aile qui entre dans la région perturbée par la première aile. D'où la nécessité, depuis longtemps reconnue par l'usage, de ne pas utiliser d'hélices ayant un grand nombre d'ailes. Il faut remarquer les expériences et les mesures délicates et ingénieuses, imaginées par l'auteur pour mettre en évidence l'état du fluide au voisinage d'une aile (Chap. IX).

Un Chapitre spécial est consacré à la compensation de l'aile, c'est-à-dire à l'étude de la modification qu'il faut apporter à la

construction, pour que les effets de la force centrifuge annulent autant que possible le moment fléchissant pour chaque tranche d'aile, de façon à assurer à l'aile la meilleure solidité. Les courbes de compensation obtenues montrent qu'une hélice parfaitement compensée peut être facilement construite en métal mince; la chose est moins aisée pour une hélice en bois, à cause de la plus faible densité.

Les derniers Chapitres sont consacrés à l'étude des moulinets, c'est-à-dire en somme des hélices réceptrices. On trouvera dans ces pages des détails sur la théorie générale, avec application à l'établissement d'un moulinet auto-régulateur imaginé par M. Drzewiecki, et qui est utilisé pour faire tourner de petites dynamos installées à bord d'avions en vue de fournir le courant nécessaire à la T. S. F., à l'éclairage, etc.

Une intéressante Note de M. Pillard termine le Volume; elle donne, pour une hélice à largeur variable, la façon de procéder à l'analyse de l'engin si l'on en connaît les résultats d'essai, et en étudie le problème d'adaptation de l'hélice sur un appareil.

Tel est, en résumé, ce Livre très judicieusement établi, qui intéressera le mathématicien, et qui donnera à l'ingénieur tous les résultats essentiels que celui-ci est en droit de demander à une théorie véritablement pratique.

H. Villat.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE ET LA THÉORIE DES FONCTIONS AUTOMORPHES;

Par M. V. SMIRNOFF

(suite et fin).

Nous voulons démontrer que, λ tendant vers λ', b et μ tendent vers b' et μ'. Dans le cas contraire, λ tendant vers λ', nous pourrions extraire deux suites de valeurs b et μ, b_n et μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, qui tendent vers les valeurs b'' et μ'', dont l'une au moins est distincte de b' et μ'. Nous désignerons, pour plus de clarté, par $\eta(x, a, \lambda)$ et $\eta(x, b, \mu)$ les quotients des intégrales des équations $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$ dans le cas de la figure 9. Supposons d'abord que la valeur b'' soit distincte de 0 et 1. Prenons le demi-plan R_1 situé au-dessous de l'axe réel, ajoutons le long des segments $(\infty, 0)$, $(0, b'')$, $(b'', 1)$ et $(1, \infty)$ quatre exemplaires du demi-plan R et excluons les points $x = 0$, b'', 1 et ∞. Soit S la surface ainsi obtenue. Découpons de cette surface le cercle γ_n décrit autour du point $x = b''$, dont le rayon ρ_n, qui diminue et tend vers zéro quand n augmente, est tel que b_n se trouve à l'intérieur de γ_n. Soit S_n la surface ainsi obtenue. Les fonctions $\eta(x, b_n, \mu_n)$ sont holomorphes sur les surfaces $S_n (n = 1, 2, \ldots)$ et bornées. Nous pouvons donc, en vertu du principe de M. Montel supposer, sans diminuer la généralité, que $\eta(x, b_n, \mu_n)$ tendent sur S vers la fonction limite $H(x)$, holomorphe sur S. Dans chaque région, située à l'intérieur de S, $\eta(x, b_n, \mu_n)$ tend vers sa limite uniformément et les dérivées $\eta^{(k)}(x, b_n, \mu_n)$ tendent vers $H^{(k)}(x)$. La fonction $\eta(x, b_n, \mu_n)$ satisfait à l'équation

$$(17) \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{2(x+\mu_n)}{x(x-b_n)(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{[x(x-b_n)(x-1)]'^2}{[x(x-b_n)(x-1)]^2},$$

et par suite $H(x)$ satisfait à la même équation avec b'' et μ'' au lieu

de b_n et μ_n. Nous verrons plus loin que $H(x)$ n'est pas une constante; par conséquent $H(x) = \eta(x, b'', \mu'')$ et cette fonction transforme le demi-plan R_1 dans le quadrilatère K'', analogue à K'. Mais, λ tendant vers λ', les sommets C et D et les côtés AH_1D, DG_1C et CF_1B tendent vers des limites déterminées. Par exemple, le côté AH_1D tend vers le côté $A'_1H'_1D'_1$ du quadrilatère correspondant aux valeurs $b = b'$ et $\mu = \mu'$, et les valeurs de la fonction limite $H(x)$ sur le segment $(\infty, 0)$ doivent se trouver sur ce côté $A'_1E'_1D'_1$. Les valeurs de la fonction $H(x)$ sur les segments $(\infty, 0)$ et $(b'', 1)$, par exemple, doivent se trouver sur les côtés $A'H'_1D'$ et $B'F'_1C'$, et, par conséquent, $H(x)$ ne peut pas être constante. De là découle aussi que le quadrilatère K'' doit coïncider avec K', correspondant aux valeurs $b = b'$ et $\mu = \mu'$, c'est-à-dire que nous devons avoir $b'' = b'$ et $\mu'' = \mu'$, ce qu'il fallait démontrer.

D'une façon analogue, nous pouvons démontrer que b'' ne peut pas être égal à 0 ni à 1. Si, par exemple, nous supposons $b'' = 0$, nous avons seulement trois intervalles sur l'axe réel et $H(x)$ vérifie l'équation

$$(18) \qquad \frac{H'''(x)}{H'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{H''(x)}{H'(x)}\right]^2 = \frac{-2\mu''}{x^2} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2\mu''}{x(x-1)}.$$

Par conséquent, $H(x)$ est le quotient des intégrales de l'équation différentielle de Gauss et les différences des racines des équations fondamentales déterminantes pour cette équation sont

$$\alpha = \sqrt{4\mu'' + 1} \quad (\text{pour } x = 0); \qquad \beta = 0 \quad (\text{pour } x = 1);$$
$$\gamma = 0 \quad (\text{pour } x = \infty).$$

Si α était purement imaginaire, $H(x)$ prendrait sur le segment $(0, 1)$ une infinité de fois ses valeurs, mais c'est absurde, car les fonctions $\eta(x, b_n, \mu_n)$ prennent chacune de ces valeurs une fois. Si la valeur $\sqrt{4\mu'' + 1}$ était réelle, la fonction $H(x)$ devrait transformer le demi-plan R_1 en un triangle de sommets réels, dont les côtés devraient se trouver sur les côtés $B'F'_1C'$, $C'G'_1D'$ et $D'H'_1A'$. Mais c'est impossible, car ces côtés ne peuvent pas former de triangle. D'une façon analogue, on peut exclure le cas $b'' = 0$. Ainsi, nous avons démontré la continuité de b et μ, quand λ varie à l'intérieur de l'intervalle Λ_2.

Supposons maintenant que λ tende vers $\lambda_{-(0)}$, qui joue dans ce cas le rôle de λ'. A la limite, le côté $C'G'_1D'$ touchera le côté $A'E'_1B'$, et nous pouvons démontrer que dans ce cas b et μ tendent respectivement vers 1 et $-\frac{1}{4}$. Soit I' le point de contact de $C'G'_1D'$ et $A'E'_1B'$. La démonstration précédente est valable dans ce cas. Si nous supposons que b'' est distinct de 0 et 1, les côtés $A'E'_1B'$, $B'F'_1C'$, $C'G'_1D'$ et $D'H'_1A'$ doivent former un quadrilatère, mais ils forment deux triangles : $A'D'I$ et $B'C'I'$. Si nous supposons $b''=0$, les côtés $B'F'_1C'$, $C'G'_1D'$ et $D'H'_1A'$ doivent former, comme nous l'avons vu, un triangle, mais c'est impossible, si $C'G'_1D'$ touche $A'E'_1B'$. Par conséquent, b tend vers 1 et la fonction $H(x)$ vérifie l'équation

$$(19)\qquad \frac{H'''(x)}{H'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{H''(x)}{H'(x)}\right]^2 = \frac{1}{2x^2} + \frac{-2\mu''}{(x-1)^2} + \frac{2\mu''}{x(x-1)},$$

et transforme le demi-plan R_1 dans le triangle $A'D'I'$. Les angles de ce triangle sont égaux à zéro et nous devons avoir $\sqrt{4\mu''+1}=0$, c'est-à-dire $\mu''=-\frac{1}{4}$.

D'une façon analogue, on peut démontrer que, si λ tend vers $\lambda_{(0)}$, b et μ tendent respectivement vers 0 et $-\frac{1}{4}$. Dans ce cas, les côtés $B'F'_1C'$ et $A'H'_1D'$ se touchent. Soit K' leur point de contact. La fonction $H(x)$ transforme le demi-plan R_1 dans le triangle $C'K'D'$. Les considérations des deux derniers paragraphes nous conduisent au théorème suivant :

Théorème VI. — Si, dans l'équation $[a, \lambda]$, λ croît d'une manière continue de $\lambda_{-(0)}$ à $\lambda_{(0)}$, dans l'équation correspondante $[b, \mu]$, les valeurs b et μ varient d'une manière continue et b, toujours décroissant, varie de 1 à 0.

Pendant cette variation, l'équation $[b, \mu]$ peut être déduite de l'équation $[a, \lambda]$ par une transformation de la forme (13) seulement dans les deux cas suivants :

1° $\lambda = \lambda^{(0)}$ et, dans ce cas, $b = a$;

2° $b = 1 - a$.

Ces deux cas se confondent si $a = \frac{1}{2}$.

4. Soient S_1, S_2 et S_3 les substitutions du groupe Γ de l'équation $[a, \lambda]$, correspondant aux lacets simples, sortant d'un point de demi-plan R et entourant les points $x = 0$, a et 1. Ces substitutions sont les substitutions génératrices du groupe Γ, et nous les appellerons les « substitutions génératrices du premier genre », pour les distinguer des substitutions génératrices du second genre, auxquelles correspondront les lacets sortant d'un point du demi-plan R_1.

Les équations correspondantes $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$ ont évidemment le même groupe Γ. Soient S_1, S_2, S_3 les substitutions génératrices du premier genre du groupe de l'équation $[a, \lambda]$. Pour l'équation $[b, \mu]$, S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1} seront les substitutions génératrices du second genre. Supposons qu'il existe encore une équation $[c, \nu]$, qui ait le même groupe Γ, ν appartenant à l'intervalle d'inversion uniforme. Le groupe Γ ne contient pas de substitution elliptique et ses points singuliers forment la ligne L, qui partage le plan en deux régions A et B. Soient x_1 la variable indépendante et η le quotient des intégrales pour l'équation $[c, \nu]$. Nous avons $x_1 = \varphi_1(\eta)$, où $\varphi_1(\eta)$ est une fonction analytique dans A ou B. Supposons par exemple que $\varphi_1(\eta)$ soit analytique dans A, et soit $x = \varphi(\eta)$ la fonction (10) pour l'équation $[a, \lambda]$. En éliminant η, nous obtiendrons une fonction analytique $x_1 = \chi(x)$. Aux mêmes valeurs de x correspondent des valeurs de η, liées par des substitutions du groupe Γ, et par suite des valeurs identiques de x_1. Cette fonction $\chi(x)$ peut avoir les points singuliers $x = 0$, a, 1 et ∞.

On peut facilement trouver à l'intérieur de A des lignes auxquelles correspondent des lacets simples décrits autour des points $x = 0$, a, 1 et ∞, et par conséquent $\chi(x)$ est une fonction uniforme. Mais, inversement, à des valeurs identiques de x_1 correspondent des valeurs identiques de x, et $\chi(x)$ prend chaque valeur, $x_1 = 0$, c, 1 et ∞ exceptés, une fois. Nous pouvons donc affirmer qu'un des points $x = 0$, a, 1 et ∞ est un pôle simple et les autres sont des points ordinaires de la fonction $\chi(x)$, et par suite cette fonction est de la forme $\chi_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$. Nous avons démontré ainsi que, si une équation $[c, \nu]$, ν appartenant à l'intervalle d'inversion uniforme, a le groupe Γ, elle est liée par une transformation de la forme (13) à l'équation $[a, \lambda]$ ou $[b, \mu]$. Remarquons encore que les points singuliers du groupe sont les points fixes des substitutions non

elliptiques du groupe et les points d'accumulation de ces points fixes et, par suite, ils sont définis par le groupe lui-même.

Les considérations précédentes trouvent leur place dans tous les cas où la fonction (10) est uniforme. Supposons que dans l'équation $[a, \lambda]$, $\lambda = \lambda_{\pm(\frac{\pi}{n})}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Les points singuliers du groupe Γ morcelleront dans ce cas la région B en une infinité de cercles. Si une autre équation $[c, \nu]$, dont l'inversion conduit à la fonction $x_1 = \varphi_1(\eta)$ uniforme, a le même groupe Γ que l'équation $[a, \lambda]$, la fonction $\varphi_1(\eta)$ est analytique dans la région A, et, en répétant la démonstration précédente, nous pourrons démontrer que l'équation $[c, \nu]$ est liée à l'équation $[a, \lambda]$ par la transformation (13).

Jusqu'ici nous avons supposé que le groupe Γ est le groupe d'une équation de la forme (1). Il est facile d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe donné Γ soit le groupe d'une telle équation. Γ doit contenir évidemment trois substitutions paraboliques, qui seraient les substitutions génératrices de Γ. Soient S_1, S_2 et S_3 ces substitutions génératrices du premier genre, correspondant aux lacets autour des points $x = 0$, a et 1. Leurs points fixes doivent être différents [1] et, en faisant une transformation linéaire convenable du plan η, nous pouvons supposer que ces points sont respectivement $\eta = 1$, ∞ et 0.

Les substitutions S_1, S_2 et S_3 auront la forme

$$(20) \qquad \frac{1}{\eta_1 - 1} = \frac{1}{\eta - 1} + b \quad (S_1); \qquad \eta_1 = \eta + c \quad (S_2); \qquad \frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta} + a \quad (S_3).$$

Le quadrilatère correspondant doit avoir pour deux côtés des lignes droites parallèles et ses sommets doivent se trouver aux points $\eta = 1$, ∞, 0 et m, où m est un nombre réel, compris entre 0 et 1. Posons $c = c' + ic''$. De considérations géométriques très simples, on peut tirer $a = \frac{-2c'}{mc}$, $b = \frac{-2c'}{(1-m)c}$, c'est-à-dire que a et b doivent avoir la forme

$$(21) \qquad a = \frac{K_1}{c}, \qquad b = \frac{K_2}{c},$$

---

[1] On peut traiter facilement les cas $\lambda = \lambda_{-\pi}$ et $\lambda = \lambda_{\pi}$ séparément.

où K_1 et K_2 sont des valeurs réelles de même signe et que l'équation

$$abc + ac + bc - ab = 0 \tag{22}$$

doit être vérifiée.

Cette équation exprime que la substitution $S_1 S_2 S_3$, correspondant au lacet autour du point $x = \infty$, est parabolique. Son point fixe est $m = \frac{b}{a+b}$. Il est aisé d'obtenir encore les conditions suivantes d'inégalité, qui expriment que les côtés opposés du quadrilatère n'ont pas de points communs sur le plan η :

$$\frac{b}{a+b} < \frac{c'}{2} \qquad (\text{si } c' > 0); \tag{23$_1$}$$

$$\frac{a}{a+b} < -\frac{c'}{2} \qquad (\text{si } c' < 0). \tag{23$_2$}$$

Inversement, on peut facilement démontrer que, si a, b et c vérifient les conditions (21), (22) et (23), il existe un quadrilatère de sommets $\eta = 0$, $\frac{b}{a+b}$, 1 et ∞, et tel que, pour l'équation correspondante, les substitutions (20) soient les substitutions génératrices du premier genre. Les conditions pour que les prolongements des côtés ne se coupent pas ont évidemment la forme

$$\frac{a}{a+b} < \frac{c'}{2} \qquad (\text{si } c' > 0); \tag{24$_1$}$$

$$\frac{b}{a+b} < -\frac{c'}{2} \qquad (\text{si } c' < 0). \tag{24$_2$}$$

Des considérations précédentes, nous tirons le théorème suivant :

Théorème VII. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe donné Γ soit le groupe d'une équation $[a, \lambda]$ est que ce groupe contienne trois substitutions paraboliques génératrices σ_1, σ_2 et σ_3 telles, qu'après le choix convenable d'une substitution S, les substitutions $S\sigma_1 S^{-1}$, $S\sigma_2 S^{-1}$ et $S\sigma_3 S^{-1}$ aient la forme (20), a, b et c satisfaisant aux conditions (21), (22) et (23).

Si, en outre, la condition (24) a lieu, il existe en général deux équations distinctes [1] de la forme (1) avec le groupe donné Γ.

---

[1] Nous appelons *distinctes* des équations qui ne peuvent pas être transformées l'une dans l'autre par une transformation de la forme (13)

Dans tous les autres cas, sous la condition d'inversion uniforme de l'équation, il existe seulement une équation de la forme (1) avec le groupe donné Γ.

Si le groupe Γ est un groupe fuchsien proprement discontinu sur la circonférence qui lui correspond, il doit contenir deux substitutions génératrices σ_1 et σ_2, qui pourraient être ramenées à la forme

$$\eta_1 = \eta_1 + 1; \qquad \frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_1} + a,$$

où a est une quantité réelle dont le module est plus grand que 2. Dans ce cas, il existe une seule équation de la forme (1) avec le groupe donné Γ.

5. Dans tous les paragraphes précédents, nous avons supposé que le paramètre de l'équation différentielle appartient à l'intervalle de l'inversion uniforme. Dans ce paragraphe, nous signalerons quelques résultats qui concernent le cas général.

Considérons d'abord le cas où la condition (24) est satisfaite. Dans ce cas, nous obtiendrons deux quadrilatères et deux équations $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$, λ et μ appartenant à l'intervalle d'inversion uniforme. A chacun de ces quadrilatères, nous pouvons appliquer l'adjonction transversale du plan. Pour cela, il faut joindre deux points, situés sur les côtés opposés du quadrilatère, par une ligne qui se trouverait à l'intérieur du quadrilatère, faire la coupure l le long de cette ligne, faire la même coupure sur un exemplaire du plan et adjoindre cet exemplaire du plan au quadrilatère le long de cette coupure l [*voir* la Thèse d'Ihlenburg (Göttingen)].

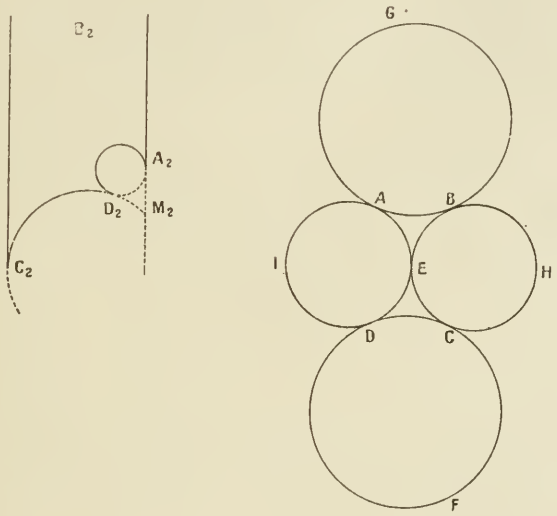
On peut appliquer cette transformation à une paire de côtés opposés un nombre arbitraire de fois. Chaque quadrilatère donne ainsi naissance à deux séries des quadrilatères, et nous aurons les équations correspondantes : $[a_n, \lambda^{(n)}]$, $[a_{-n}, \lambda^{(-n)}]$, $[b_n, \mu^{(n)}]$ et $[b_{-n}, \mu^{(-n)}]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (1). L'équation $[a_n, \lambda^{(n)}]$, par exemple, est l'équation qui correspond au quadrilatère, dans lequel les côtés AB et CD sont superposés n fois. Les équations

(1) Les désignations $\lambda^{(n)}$, λ^{-n} sont distinctes de la même désignation du Chapitre I.

$[a_n, \lambda^{(n)}]$ et $[a_{-n}, \lambda^{-n)}]$ ont les mêmes substitutions génératrices que l'équation $[a, \lambda]$ et les équations $[b_n, \mu^{(n)}]$ et $[b_{-n}, \mu^{(-n)}]$ ont les mêmes substitutions génératrices que l'équation $[b, \mu]$. Ainsi nous avons obtenu toutes les équations de la forme (1) avec le groupe donné Γ.

En effet, dans le cas présent, Γ n'a pas de substitution elliptique et ses points singuliers forment une ligne L, qui partage le plan en deux parties. Si une équation $[c, \nu]$ a le groupe Γ, dans

Fig. 10.



le quadrilatère correspondant K″, les côtés opposés et leurs prolongements ne peuvent pas avoir de points communs sur le plan η (1).

K″ peut avoir des côtés superposés, mais le contour simple de ce quadrilatère forme le quadrilatère K sans côtés superposés, auquel correspond l'équation avec le même groupe Γ, dont l'inversion conduit à la fonction uniforme. En vertu du théorème VII, cette équation peut être déduite de l'équation $[a, \lambda]$ et $[b, \mu]$ par une transformation de la forme (13) et l'équation $[c, \nu]$ peut

(1) Nous verrons plus loin que, dans le cas d'existence de côtés superposés, les deux autres côtés peuvent avoir des points communs sur le plan η.

être obtenue par une transformation d'une des équations susdites.

Considérons maintenant le cas où les prolongements de deux côtés opposés se touchent. En supposant que le point $\eta = \infty$ se trouve à l'intérieur du quadrilatère, nous obtenons la figure 10.

Sauf le quadrilatère K avec le contour simple AGBHCFDIA, les circonférences forment encore le quadrilatère K′ avec le contour AEDCFDCEBAGBA, dont deux côtés se couvrent une fois. Nous pouvons faire l'adjonction transversale dans ces deux quadrilatères seulement par rapport aux côtés situés sur les circonférences AGBA et DFCD. En effet, en employant les raisonnements par lesquels nous avons démontré dans le n° 4 du Chapitre I, que les côtés opposés ne peuvent pas avoir de point commun sur le plan η, nous pouvons maintenant démontrer la même chose pour les côtés superposés.

Nous obtenons ainsi, dans le cas présent, les équations $[a, \lambda]$ et $[b_1, \mu^{(1)}]$ correspondant aux deux quadrilatères susdits, $\mu^{(1)}$ n'appartenant pas à l'intervalle d'inversion uniforme, et deux séries d'équations $[a_n, \lambda^{(n)}]$ et $[b_n, \mu^{(n)}]$, qui correspondent aux quadrilatères obtenus par l'adjonction transversale. Toutes ces équations ont le même groupe Γ, qui n'a pas de substitution elliptique et dont les points singuliers forment une infinité de circonférences limitant une région simplement connexe.

Inversement, si une équation $[c, \nu]$ a le groupe Γ, les circonférences, qui forment le quadrilatère correspondant, sont disposées de la manière indiquée sur la figure 10. Elles forment aussi un quadrilatère sans côtés superposés, et l'équation correspondante n'est pas distincte de l'équation $[a, \lambda]$ en vertu du théorème VII. Par conséquent, ce quadrilatère sans côtés superposés est lié au quadrilatère K par une transformation linéaire de la première ou de la seconde espèce et, par suite, le quadrilatère correspondant à l'équation $[c, \nu]$ est lié par une même transformation linéaire à l'un des quadrilatères K, K′ ou à celui qui se déduit de K ou K′ par l'adjonction transversale. Par conséquent, l'équation $[c, \nu]$ peut être déduite, par une transformation de la forme (13), d'une des équations $[a, \lambda]$, $[a_n, \lambda^{(n)}]$, $[b_n, \mu^{(n)}]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Enfin, si le groupe Γ est un groupe fuchsien proprement discontinu sur la circonférence qui lui correspond et si les conditions

du théorème VII sont satisfaites, il existe un seul quadrilatère K sans côtés superposés et les quadrilatères, qui en dérivent par l'adjonction transversale par rapport aux côtés, qui sont des circonférences complètes [1], et les équations correspondantes sont toutes les équations distinctes, ayant le groupe Γ.

Ainsi, nous avons trouvé toutes les équations de la forme (1), qui ont le même groupe Γ, dans le cas où ce groupe ne contient pas de substitution elliptique. Quand ce groupe contient des substitutions elliptiques, deux des circonférences qui forment le quadrilatère se coupent. Nous avons dans ce cas, comme dans le cas précédent, les quadrilatères K et K'. L'étude approfondie de ce cas exige quelques recherches préliminaires sur le groupe Γ dépendant de la valeur φ de l'angle, sous lequel se coupent les circonférences susdites.

Dans tous les cas, les circonférences qui forment le quadrilatère forment aussi un quadrilatère sans côtés superposés, et, par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes, indiquées dans le théorème VII, conviennent pour le cas général.

SUR UN PERFECTIONNEMENT A APPORTER AUX STATISTIQUES ;

PAR M. AURIC.

Quand on se propose d'étudier un phénomène météorologique dont la période est, par exemple, d'une année ou d'un jour au moyen de statistiques, on a coutume de rapporter celles-ci soit à l'année civile commençant le 1er janvier, soit au jour civil commençant à minuit; pourtant, il est bien évident que l'origine arbitraire de ces périodes ne s'impose nullement et qu'au contraire il peut être parfois très avantageux de choisir judicieusement cette origine d'après la nature même du phénomène à étudier.

[1] Dans le Chapitre I, nous avons vu que, dans le quadrilatère, deux côtés opposés seulement peuvent être superposés.

Admettons, par exemple, que l'on veuille approfondir l'étude du régime des pluies dans le nord de l'Algérie; on sait, par expérience, que durant les trois mois d'été (juin, juillet, août) il ne tombe pour ainsi dire pas une goutte d'eau; c'est donc à partir de cette période de sécheresse bien connue qu'il convient de dresser les statistiques annuelles de l'eau pluviale tombée et non à partir du 1er janvier; il existe une véritable année pluviale qui n'a rien de commun avec l'année civile, car celle-ci se compose de la dernière partie de l'année pluviale précédente et de la première partie de l'année pluviale suivante; on comprend, dès lors, fort bien qu'une année civile puisse donner des résultats anormaux bien que les années pluviales qui la renferment aient fourni des résultats normaux et inversement. La même remarque s'applique d'ailleurs au régime des sources ou des cours d'eau qui tarissent régulièrement en été.

A chaque phénomène météorologique donné correspond une courbe périodique qui sert à le définir, l'intensité du phénomène (température, pression, pluie, etc.) étant portée en ordonnée et le temps en abscisse; l'origine de la période doit être choisie de manière à réduire au minimum les erreurs inévitables dans l'interprétation des faits.

Cette courbe possède évidemment des maxima et des minima et il est clair que la position exacte de ces points limites est toujours très difficile à déterminer avec précision, car la courbe se confond sur un certain parcours avec une parallèle à l'axe des abscisses; au contraire, entre un maximum et un minimum, il existe toujours une tangente d'inflexion dont l'intersection avec une parallèle à l'axe des abscisses peut être appréciée avec beaucoup plus d'exactitude; il semble donc généralement avantageux de choisir l'origine de la période à proximité d'un point d'inflexion, car une erreur a certainement moins d'inconvénient que si l'on plaçait cette origine dans le voisinage d'un maximum ou d'un minimum.

La même observation paraît s'appliquer également à la statistique des taches du Soleil.

APPLICABILITÉ DES SURFACES RÉELLES. ÉTUDE SPÉCIALE DE LA CORRESPONDANCE ENTRE POINT RÉEL ET POINT IMAGINAIRE. SYSTÈMES CYCLIQUES RÉELS ET SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX CORRESPONDANTS;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

INTRODUCTION.

1. Au *Bulletin des Sciences mathématiques* (1920) et aux *Comptes rendus* (1919 et 1920), j'ai étudié l'application de deux surfaces réelles. Le présent Mémoire comprend trois Chapitres.

Au premier Chapitre je donne des résultats plus précis relativement à la configuration de deux surfaces réelles S et S_1 telles que S_1 ne recouvre physiquement qu'une portion de S : j'avais, pour simplification, écarté l'hypothèse où l'une ou l'autre surface admet une ligne d'arrêt ou bien se décompose en plusieurs nappes. Le résultat définitif est le suivant : *ou bien* S_1 *admet une ligne d'arrêt* C_1, *constituant une asymptotique singulière de cette surface* et C_1, dans l'application de S_1 sur S, recouvre une courbe C frontière des régions recouvertes ou non; *ou bien* S_1 *admet une auto-application* et, dans ce cas, j'ai encore deux hypothèses possibles : ou bien S se décompose en plusieurs nappes séparées, connexes chacune, dont l'une est recouverte complètement par S_1, ou bien S_1 admet une ligne de rebroussement C_1 dont chaque point reste invariant dans l'auto-application de S_1; C_1 *est encore asymptotique singulière de* S_1, propriété importante non signalée dans le premier Mémoire; C_1 recouvre encore sur S la courbe frontière C des régions recouvertes ou non. J'indique ensuite, dans le cas où une surface S admet une auto-application, le moyen de reconnaître *a priori* combien de *types* différents de surfaces réelles correspondent à ce ds^2, deux surfaces de type différent ne pouvant se recouvrir physiquement, deux surfaces de même type pouvant au contraire se recouvrir totalement ou partiellement, ou même encore pas du tout. Ces considérations permettent aussi de décider si toute surface réelle représentative du ds^2 doit admettre ou non soit une auto-application, soit une ligne d'arrêt.

Le second Chapitre est destiné à donner des exemples précis de surfaces réelles correspondant aux divers *types* d'un même ds^2, de façon à bien préciser ce que j'ai appelé ds^2 *réduit* et *régions d'un* ds^2 *réduit*. Nous verrons que les surfaces représentatives d'une même région peuvent offrir une configuration compliquée et il serait intéressant de reconnaître dans quel cas il existe une ou plusieurs surfaces représentatives d'une région entière. J'aurai l'occasion, à propos du paraboloïde, de donner des exemples intéressants de surfaces illustrant les fonctions analytiques qui admettent une coupure essentielle.

Dans le troisième Chapitre je donnerai une application *dans le domaine purement réel* de cette étude portant presque exclusivement sur une relation de point réel à point imaginaire. Nous verrons avec quelle facilité s'obtiennent les systèmes cycliques *réels*, et les systèmes orthogonaux qui en dérivent, en réalisant une première surface *réelle* S et une seconde surface S_1, applicable sur S, *soit totalement imaginaire*, *soit réelle* avec cette particularité que la totalité ou une fraction de S ait une homologue imaginaire sur S_1. De la sorte, je pourrai faire observer que, jusqu'ici, la correspondance d'un point réel de S à un point imaginaire de S_1 avait déjà été maintes fois signalée, mais plutôt dans le but de négliger sur S les portions dont l'homologue est imaginaire. Ici ce sera le contraire : ce sont ces portions que nous conserverons à l'exclusion des autres. Mon travail aura donc donné des résultats *positifs*, et non pas seulement *négatifs*, pour la configuration géométrique d'un couple de deux surfaces applicables; j'espère que l'intérêt en paraîtra bien plus grand encore par cette solution d'un problème très éloigné, au moins en apparence, dont l'énoncé était connu antérieurement à ces recherches.

CHAPITRE I.

1. Soient deux surfaces réelles [1], connues, S et S_1, ayant même ds^2, *ne possédant pas de ligne d'arrêt*, pouvant se composer soit d'une nappe unique connexe, soit de plusieurs nappes séparé-

[1] Dans tout le cours du Mémoire, je ne m'occupe que des surfaces analytiques, de façon à pouvoir parler des points et des nappes imaginaires.

ment connexes. Nous supposons que tous les points d'une certaine région de S ont un homologue imaginaire sur S_1 : nous en avons déduit que S_1 possède une auto-application.

Premier cas. — Si *tout* point réel de S a son homologue imaginaire sur S_1, réciproquement *tout* point réel de S_1 a son homologue imaginaire sur S et la surface S possède elle-même une auto-application.

Second cas. — Les points réels de S se partagent en deux séries : les points m dont l'homologue sur S_1 est réel, et les points n dont l'homologue est imaginaire. Deux subdivisions sont à envisager.

Première subdivision du second cas. — Il n'existe pas, sur toute l'étendue réelle de S, de frontière réelle entre les points m et n : cela exige que S *se compose de plusieurs nappes séparées*, séparément connexes. Il n'y a rien à ajouter pour S_1.

Un exemple simple s'obtient en supposant que S_1 est le paraboloïde de révolution [1] et que S est la surface déduite d'une courbe sphérique B analytiquement indécomposable, ayant le centre de la sphère pour centre de symétrie; S se compose de deux nappes réelles, l'une tout entière applicable physiquement sur le paraboloïde, tandis que tout point réel n de l'autre nappe a sur le paraboloïde un homologue imaginaire.

Seconde subdivision du second cas. — Il existe sur S une courbe C réelle, frontière de points m et n. Nous avons vu qu'à la courbe C correspond sur S_1 une courbe réelle C_1, arête de rebroussement de S_1, dont chaque point reste invariant dans l'auto-application déjà signalée sur S_1 comme conséquence de l'existence de points n. Les deux nappes de S_1, séparées par C_1, peuvent se recouvrir mutuellement, chacune peut recouvrir la région constituée sur S par les points m d'un côté de S, de sorte que cette région de S est, en réalité, deux fois recouverte par S_1.

Ce résultat a été démontré au Mémoire précédent; de nombreux exemples de cette configuration étaient d'ailleurs connus bien antérieurement, bien qu'elle n'eût pas été remarquée. La conclusion

---

[1] *Voir* mon Mémoire sur le paraboloïde (*Bulletin de la Société mathématique*, 1920-1921).

est, en réalité, bien plus précise encore : *en chaque point de la courbe* C_1 *le plan osculateur est tangent à la surface* S_1 ; C_1 *est asymptotique singulière de* S_1.

Si l'on fait tourner une courbe plane, ayant un point de rebroussement, autour d'un axe de son plan, on obtient un parallèle de rebroussement qui n'est asymptotique (singulière) de la surface engendrée, que si l'axe est perpendiculaire à la tangente de rebroussement. La circonstance indiquée pour C_1 mérite donc bien d'être relevée ; de plus nous allons retomber sur un cas d'exception bien connu dans la théorie de la déformation.

2. Pour démontrer ce résultat, supposons que nous partions d'une surface réelle donnée S : nous avons tracé sur S une courbe C et nous cherchons à déformer S de sorte que C se transforme en une courbe donnée *a priori* C_1 : ceci entraîne, pour être tout à fait précis, que nous marquions un couple de deux points correspondants P et P_1 sur C et C_1 et indiquions les sens de parcours correspondants. La surface inconnue S_1 se détermine par la méthode classique (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 277 et suiv.). Soient ρ le rayon de courbure de C en un point, θ l'angle de la normale à S et du plan osculateur de C, ρ_1 et θ_1 les éléments homologues sur C_1 et S_1. On aura

$$(1) \qquad \frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{\sin\theta_1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_g},$$

où ρ_g sera le rayon de courbure géodésique de C sur S. Supposons $\rho_1 < \rho_g$, on trouve pour θ_1 deux valeurs réelles supplémentaires : l'une d'elles, choisie et suivie par continuité, définit une surface S_1 réelle, *recouvrant* S *de part et d'autre de* C (et une seule fois).

Si $\rho_1 < \rho_g$, on trouve encore deux surfaces S_1, mais imaginaires.

En dehors de ces deux solutions, il ne peut en exister d'autres.

Si nous appliquons ceci à l'un des nombreux couples de surfaces réelles S et S_1 applicables, S étant recouverte en double sur une région limitée par une courbe réelle C, et n'étant pas recouverte sur la région complémentaire, il est clair qu'il y aurait contradiction à supposer $\rho_1 < \rho_g$ ou $\rho_1 > \rho_g$. Donc $\rho_1 = \rho_g$, d'où $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$: la courbe C_1 est asymptotique de S_1, nous allons voir que c'est une asymptotique *singulière et non normale*.

3. S, C et C_1 étant données, S_1 étant l'inconnue si l'on a $\rho_1 = \rho_g$ et de plus $\tau_1^2 + RR' = 0$, où τ_1 est le rayon de torsion de C_1, R et R' les rayons de courbure principaux de S, la déformation de S cesse d'être *déterminée*, on obtient une infinité de surfaces réelles S_1 recouvrant S de part et d'autre de C : ce résultat, amorcé par Darboux, a été démontré par M. Goursat aux *Annales de Toulouse* (1909); sur chaque surface S_1 obtenue, C_1 est une asymptotique *régulière*.

Donc pour les couples S et S_1 que j'étudie ici, on doit avoir $\rho_1 = \rho_g$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, mais $\tau_1^2 + RR' \neq 0$. C_1 sera donc asymptotique *singulière* et non asymptotique normale.

Les considérations qui précèdent s'appliquent si S_1 admet une ligne d'arrêt C_1 correspondant à une courbe réelle C tracée sur S : j'en donnerai des exemples simples au Chapitre suivant; on aura $\rho_1 = \rho_g$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\tau_1^2 + RR' \neq 0$, exactement pour les mêmes raisons, la seule modification est que S est recouverte d'un côté de C, *en simple* et non en double.

Ce qui précède conduit au problème suivant : « Une surface réelle S est donnée, je trace sur elle une courbe C, existe-t-il une surface réelle S_1 ne recouvrant S (en simple ou double) que sur l'une des régions limitées par C ? Si C est donnée, le côté recouvert au voisinage de C est-il arbitraire ? »

Nous voyons immédiatement que, *si* S_1 *existe*, la courbe C_1 est l'une des courbes gauches (accidentellement plane) définies par la relation $\rho_1 = \rho_g$. C_1 étant ainsi choisie, nous tombons sur le cas exceptionnel signalé par Darboux et laissé en suspens par lui. L'exposé de Darboux semble même pencher pour l'impossibilité : les exemples nombreux trouvés prouvent clairement que l'impossibilité ne peut être absolue; il resterait à élucider si la courbe C peut être tracée arbitrairement sur S ou si elle doit satisfaire à certaines conditions; la courbe C étant choisie, il resterait ensuite à voir si C_1 peut elle-même être choisie arbitrairement ou non parmi celles que définit $\rho_1 = \rho_g$. Ensuite C et C_1 étant données, dans le cas de possibilité, la surface S_1 est-elle unique ? Quel est le côté recouvert au voisinage de C ? Ces questions délicates peuvent, dans le cas des développables, être immédiatement résolues.

4. Dans cette hypothèse, j'emploierai l'artifice bien simple qui consiste à transformer S en un plan P par un développement préalable; en réalité on n'obtient qu'une portion de plan P, celle d'où l'on peut mener des tangentes réelles au développement D de l'arête de rebroussement de S, mais peu importe; cette portion est même composée de deux feuillets, je pourrai me borner à l'un d'eux. Il me suffira maintenant d'étaler la seconde développable S_1 sur P, puis d'enrouler P sur S, de sorte que S_1 se trouvera elle-même enroulée sur S. La courbe C peut être choisie arbitrairement, la courbe C_1 est l'une quelconque de celles que définit $\rho_1 = \rho_g$, la surface S_1 recouvre en double (et non en simple) la développable S du côté de C où les géodésiques de S, tangentes à C aux divers points de cette courbe, pénètrent sur la surface S : tout cela est évident en songeant au développement Γ de la courbe C sur le plan P.

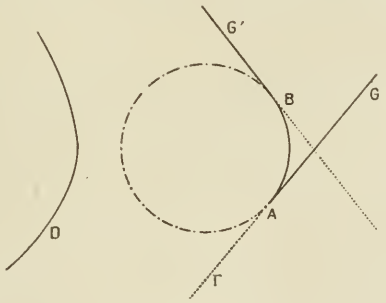
Ceci suppose que Γ est une courbe proprement dite (et non une droite) et ne possède pas de point d'arrêt. Si Γ est une courbe à point d'arrêt, il en est de même pour C. La courbe C_1 est encore l'une quelconque de celles que définit $\rho_1 = \rho_g$, elle admet aussi un point d'arrêt; sur S je trace la géodésique G tangente à C au point d'arrêt; la région recouverte sur S est limitée par C et la géodésique ainsi définie; S est recouverte en double, comme plus haut, au voisinage de C et en simple au voisinage de G. Cette géodésique G correspond sur S_1 à la tangente G_1 au point d'arrêt de C_1, et cette tangente G_1 est une ligne d'arrêt de S_1. Conformément à la théorie générale, cette tangente G_1 est bien asymptotique de la surface S_1.

On peut remarquer que la géodésique G de S étant donnée, on peut recouvrir S, en simple, d'un côté arbitrairement choisi par rapport à G : en effet, sur P, le développement de G est une droite, et alors on peut tracer sur P la courbe admettant un point d'arrêt, tangentiellement à cette droite en un point arbitraire et d'un côté arbitraire par rapport à cette droite.

Supposons maintenant que le développement Γ de la courbe C soit une droite, autrement dit que C soit une géodésique de S. Nous pouvons remarquer en passant que si la transformée de C est une courbe quelconque C_1, l'équation (1) trouvée plus haut se réduit à $\sin \theta_1 = 0$; cette fois prendre $\theta_1 = 0$ ou $\theta_1 = \pi$ donne

pour S_1 une seule surface (au lieu de deux), c'est la surface développable enveloppe du plan perpendiculaire en chaque point de C_1 à la normale principale de C_1; c'est la déformation régulière de S; S est recouverte de part et d'autre de C. Pour obtenir le cas exceptionnel, quand C est géodésique de S, il faut supposer que C_1 est une droite. Je vais montrer qu'il y a une infinité de déformations de la développable S correspondant à la transformation de la géodésique C en la droite C_1 et que de plus S sera recouverte en double par S_1 d'un côté arbitrairement choisi de C. Nous pourrons par exemple supposer que S_1 est l'une de ces développables indiquées dans mon précédent Mémoire : l'arête de rebroussement de S_1 est une courbe à courbure constante présentant des points de rebroussement de seconde espèce (*voir* § 5 et *fig.* 8 du précédent Mémoire). S_1, appliquée sur un plan, en recouvre la portion limitée par l'arc de cercle limité AB et les deux tangentes AG et BG′ aux extrémités. Ici (*fig.* 1), le développement de la

Fig. 1.



géodésique C est une droite Γ; transportons la figure 8 du précédent Mémoire sur la figure 1 de ce travail, et cela de façon que AG coïncide avec Γ, S se trouve donc recouverte en double d'un certain côté de C; si nous retournons alors le cercle AB autour de la tangente AG, nous avons un nouveau mode d'application de S_1 sur S, où cette fois la région recouverte en double est celle qui primitivement ne l'était pas. Cela démontre la proposition; avec les surfaces S_1 employées ici nous avons comme arbitraires la position de A sur la droite Γ et le nombre, commensurable ou non, $\frac{p}{r}$ dont dépend la surface S_1.

En résumé, si la surface S est une développable et C une courbe arbitraire, non géodésique, tracée sur S, on peut trouver une infinité de développables recouvrant S en double sur une région convenablement choisie entre les deux qui admettent C pour frontière. Si C est une géodésique, on peut trouver une infinité de développables recouvrant S en simple ou en double sur l'une quelconque des deux régions admettant C pour frontière.

5. Ceci laisse prévoir ce qui arrive vraisemblablement si la surface S n'est pas développable. Traçons sur S une courbe C arbitraire que nous supposerons d'abord non géodésique. Si S peut effectivement être recouverte en double d'un côté de C, il est vraisemblable que la région recouverte est celle où pénètrent, au voisinage de C, les géodésiques tangentes à C en ses divers points. Dans tous les exemples obtenus, c'est bien cette circonstance qui se produit. On aurait ainsi à distinguer sur S les régions déterminées, d'abord par C, puis par les géodésiques particulières tangentes à C aux points où le rayon de courbure géodésique de C est infini.

Si la courbe C est elle-même une géodésique, la transformée de C étant une droite, nous aurions encore le cas exceptionnel; il se peut que S puisse être recouverte, en double ou en simple, d'un côté arbitrairement choisi de C.

Nous remarquons encore ici le rôle exceptionnel que jouent les géodésiques : si la courbe C est une géodésique et si la transformée C_1 n'est pas une droite, nous retombons sur le cas normal de déformation, mais l'équation $\sin \theta_1 = 0$ ne définit qu'une surface réelle S_1 et non pas deux.

6. Dans le précédent Mémoire je n'avais pas suffisamment insisté sur le cas où l'une des deux surfaces S et S_1, ou même toutes deux, se composent de plusieurs nappes, en nombre fini ou infini. Les résultats énoncés sont exacts à condition de bien spécifier que l'on envisage chaque surface avec la totalité de ses nappes. Si la surface réelle S_1 ne recouvre S que partiellement, nous devons bien remarquer qu'il y a deux conclusions possibles : ou bien S se décompose en plusieurs nappes ou bien S_1 possède une ligne de rebroussement (ou d'arrêt) avec les circonstances géométriques

signalées plus haut. Un exemple déterminé peut même réunir l'ensemble de ces deux conclusions.

De même, si deux nappes réelles, analytiques, sans ligne d'arrêt, S et S_1, ont même ds^2, mais ne peuvent se recouvrir physiquement sur aucune étendue, il faut bien se garder d'affirmer sans précaution que la correspondance entre les surfaces complètes S et S_1 a lieu de point réel à point imaginaire. Cela peut être vrai, même au cas où S et S_1 comprennent chacune plusieurs nappes; mais il peut arriver que l'une des surfaces ou toutes deux admettent plusieurs nappes, la nappe S et la nappe S_1 n'étant pas deux nappes correspondantes, les points de S ayant leur homologue réel sur une nappe différente de la surface S_1.

C'est d'ailleurs un problème intéressant, analogue à celui du prolongement analytique, de reconnaître si une nappe réelle, connexe et analytique, donnée avec ou sans bord, constitue toute l'étendue réelle de la surface analytique; dans le cas de la négative, de franchir le bord que l'on a reconnu artificiel ou de trouver les autres nappes réelles. Je reviendrai un peu plus loin sur ces points.

Dans le même ordre d'idées, si deux surfaces S et S_1, réelles et applicables, n'ont pas le même nombre de nappes, l'une (au moins) admet une auto-application : il n'y a, en tout cas, aucune raison *a priori* que ce soit la surface au plus grand ou au plus petit nombre de nappes. S peut admettre une ou plusieurs nappes à homologue imaginaire, S_1 admet une auto-application et peut admettre moins de nappes que S. Au contraire, plusieurs nappes réelles de S peuvent être toutes applicables physiquement sur une même nappe de S_1 et c'est S qui admet une auto-application.

Si ni S, ni S_1 n'admettent d'auto-application, elles ont le même nombre de nappes; chaque nappe de S s'associe à une nappe de S_1 et deux nappes associées se recouvrent mutuellement et complètement une fois et une seule.

Il est utile aussi de bien insister sur ce fait que si une surface S n'admet ni auto-application, ni ligne d'arrêt, elle recouvre nécessairement *complètement* toute surface S_1 de même ds^2, ou, si l'on préfère, S_1 recouvre physiquement soit la totalité, soit une fraction (fraction non nulle) de S, tout point réel de S_1 ayant un homologue réel sur S.

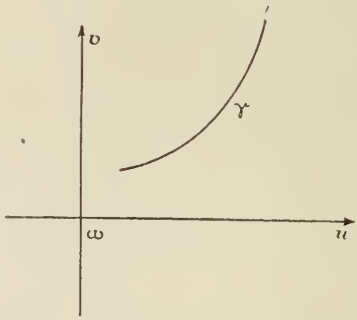
7. Il est utile, pour la suite, de démontrer rigoureusement une proposition importante, regardée à tort comme évidente.

Je considère une forme quadratique

$$E(u, v)\,du^2 + 2\,F(u, v)\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et nous cherchons s'il existe des surfaces réelles dont le ds^2 coïncide avec cette forme; nous pourrons supposer, par un changement de variables préalable s'il y a lieu, que les paramètres u, v sont réels. Supposons donc que le point réel (u, v), décrivant un

Fig. 2.



certain domaine du plan $\omega\,uv$ (*fig.* 2), E, F, G soient réels, définis, continus et satisfassent aux inégalités

$$E > 0, \qquad G > 0, \qquad EG - F^2 > 0,$$

qui se réduisent à 2 comme l'on sait. Dans ce domaine traçons une courbe γ : en chaque point μ de γ, nous pouvons calculer la courbure totale de toute surface éventuelle S ayant le ds^2 donné, la courbure géodésique en M de la courbe C correspondant sur cette surface S à la courbe γ, la longueur s de l'arc de courbe compté sur C jusqu'en M. Le rayon de courbure géodésique ρ_g de C en M est une certaine fonction de s; nous pouvons donc choisir d'une infinité de façons une fonction $\rho(s)$ telle que $\rho(s) < \rho_g(s)$, puis construire une courbe, plane ou gauche, dont $\rho(s)$ soit le rayon de courbure : j'appelle C cette courbe. L'équation $\frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{1}{\rho_g}$, déjà rencontrée, et la méthode rappelée plus haut permettent de déterminer deux surfaces réelles contenant la courbe C, ayant

pour ds^2 la forme donnée, telles que l'image de la courbe C dans le plan (u, v) soit γ; chacune de ces surfaces S correspond à une région du plan image (u, v) à cheval sur la courbe γ. C'est ce qu'il fallait établir.

Si γ satisfait à l'équation du second ordre en u, v des géodésiques, on remarquera que pour chaque fonction ρ finie et chaque courbe C correspondante on obtient une surface S réelle et non deux.

Le cas exceptionnel correspond à $\rho = \rho_g$, $\tau^2 + RR' \neq 0$, il est inutile de répéter les conclusions obtenues.

8. Il résulte clairement de là que si les inégalités $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$, définissent plusieurs régions distinctes du plan u, v, toute surface représentative du ds^2 peut admettre plusieurs nappes correspondant respectivement à ces régions; mais il peut arriver que deux surfaces différentes correspondent à des régions différentes et, par suite, que chacune d'elles corresponde à l'autre, point réel pour point imaginaire.

C'est la réciproque que je me propose d'étudier : premièrement, si une surface donnée S n'admet pas d'auto-application, elle admettra autant de nappes distinctes que son ds^2 définit de régions distinctes. Il ne faut pas conclure de là que si un ds^2 donné définit plusieurs régions, il existe une surface sans auto-application représentative de l'ensemble des régions : pour le ds^2 de l'ellipsoïde, nous verrons que c'est faux.

Deuxièmement, supposons que nous connaissions une surface S auto-applicable; cherchons s'il existe une surface réelle S_1 correspondant à S uniquement point réel pour point imaginaire dans son application sur S.

Si nous songeons à une surface telle que l'ellipsoïde

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \qquad (a > b > c > 0),$$

si nous prenons comme variables x et y, le ds^2 de E a pour coefficients des fractions rationnelles en x et y et les auto-applications de E tiennent à deux causes : z est une fonction non uniforme de x et y, d'où résulte une symétrie plane par rapport à xOy, auto-application non mise en évidence par le ds^2. D'autre part, le chan-

gement de x en $-x$ ou de y en $-y$ n'altère pas le ds^2 : il en résulte les symétries planes par rapport à yOz ou zOx, mises en évidence par le ds^2. Le changement de variables $x^2 = X$, $y^2 = Y$ donne un ds^2 encore rationnel en X et Y, ne mettant plus cette fois en évidence ces deux symétries. Avec les variables X, Y, ces symétries sont dues à la première cause signalée : x, y ont cessé elles-mêmes d'être fonctions uniformes des variables adoptées.

Ceci est général : j'écarte le cas des ds^2 de révolution, ou à courbure totale constante. Supposons la forme

$$E(u, v)\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

définie, positive avec des coefficients E, F, G, uniformes en u, v. Les coordonnées d'un point de la surface auto-applicable peuvent, dans un premier cas, n'être pas uniformes en u, v; à un couple (u, v) correspondent plusieurs points se correspondant dans une auto-application; cette circonstance n'est pas mise en évidence par le seul ds^2. Dans un second cas, il existe une substitution

$$(2) \qquad \begin{cases} u_1 = f(u, v), \\ v_1 = \varphi(u, v) \end{cases}$$

entraînant l'identité

$$(3) \qquad \begin{aligned} &E(u_1, v_1)\,du_1^2 + 2F(u_1, v_1)\,du_1\,dv_1 + G(u_1, v_1)\,dv_1^2 \\ &= E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2. \end{aligned}$$

J'appellerai cette substitution (2) une *transformation intrinsèque du* ds^2 : la théorie acquise de la déformation permet de trouver toutes ces transformations intrinsèques, quand elles existent. Les auto-applications de la surface qui leur correspondent sont mises en évidence par le ds^2, et c'est pour cette raison que nous ne garderons pas ce ds^2; un changement de variables convenable permettra, comme plus haut pour E, de trouver deux paramètres nouveaux U, V qui ont un seul système de valeurs pour les couples (u, v) et (u_1, v_1) de sorte que les coordonnées des points de la surface cesseront d'être uniformes en U, V; les auto-applications rentreront toutes dans la première catégorie. L'ellipsoïde E a ses points répartis par groupes de huit se correspondant dans les auto-applications, ici symétries par rapport aux plans ou aux axes de coordonnées ou à l'origine : à ces huit points correspond un seul système X, Y.

Donc, pour toute surface auto-applicable S donnée, nous pouvons, par la série préalable d'opérations que je viens d'indiquer, obtenir un ds^2 définitif que j'appellerai ds^2 *réduit*, possédant les propriétés suivantes (ds^2 de révolution ou à courbure totale constante provisoirement écartés) :

1° Le ds^2 réduit ne possède plus de transformation intrinsèque; à chaque point de la surface correspond un seul système de paramètres définitifs (X, Y), de sorte que si le point est réel, X et Y sont réels. Aux divers points de la surface, qui se correspondent dans les auto-applications, correspond le même couple (X, Y).

2° Aux points correspondants de deux surfaces S et S_1 admettant ce ds^2, le couple X, Y a la même valeur.

Nous allons maintenant chercher si le ds^2 réduit est défini, fini et positif dans tout le plan réel OXY ou non : Si oui, nous avons un *type unique* de surfaces représentatives. Si non, nous avons autant de *types distincts* que de *régions* (remarquons que le nombre de régions peut encore être égal à l'unité), où ce ds^2 est défini, fini et positif. Si le nombre des régions est supérieur à l'unité, chaque région définit, nous l'avons démontré avec soin au paragraphe précédent, une infinité de surfaces réelles : deux surfaces de type différent sont en général telles qu'à tout point réel de l'une correspond un point imaginaire de l'autre; il ne pourrait y avoir exception, d'après le paragraphe 6, que si chaque surface se décomposait en plusieurs nappes et qu'à toute nappe de l'une, représentative d'une certaine région, corresponde une nappe de l'autre, représentative de la même région : mais, sauf cette circonstance précise, le fait annoncé doit bien avoir lieu et, en général, nous avons effectivement autant de *types* que de *régions* : d'ailleurs, même dans le cas réservé à l'instant, il est clair que deux nappes représentatives l'une d'une première région, l'autre d'une seconde région, ne peuvent se recouvrir sur aucune étendue réelle, et cela justifie bien le nom de *types distincts*.

Je rappelle que je ne m'occupe que de surfaces analytiques; ici je suis arrivé à définir les points réels par des fonctions réelles de variables réelles; s'il s'agissait de surfaces réelles définies uniquement par points réels pour des valeurs réelles de deux paramètres X, Y, sans que la définition puisse s'étendre aux valeurs

complexes de X et Y, il est clair que beaucoup des propriétés établies ici pourraient s'évanouir. Si donc le ds^2 réduit n'est pas défini, positif et continu dans tout le plan, que le nombre des régions soit égal à l'unité ou supérieur, toute surface représentative du ds^2 doit admettre soit une ligne d'arrêt, soit une auto-application.

Au lieu de comparer deux régions, restons dans une seule région : il peut arriver, comme pour l'ellipsoïde, qu'une région puisse être représentée *totalement* par une certaine surface; mais il peut arriver qu'une surface réelle ne représente qu'une fraction de cette région : d'après les paragraphes 3 et 7, la surface doit admettre une ligne d'arrêt ou de rebroussement ayant pour image dans le plan OXY la courbe frontière de la fraction représentée; cette ligne d'arrêt ou de rebroussement présente les caractères géométriques si souvent signalés. J'ai laissé en suspens la question qui revient à décider si l'on peut se donner arbitrairement la frontière de fraction de région représentée. Nous verrons, à propos du paraboloïde ou de certaines surfaces de translation, que, même dans une même région, on peut trouver deux surfaces non susceptibles de se recouvrir mutuellement ou, chose non nécessairement synonyme, deux surfaces se correspondant uniquement point réel pour point imaginaire.

9. En appliquant ceci à l'ellipsoïde E déjà signalé et posant $x^2 = X$, $y^2 = Y$, on trouve aisément

$$(4)\quad 4\,ds^2 = dX^2\left[\frac{1}{X} + \frac{c}{a^2}\,\frac{1}{1-\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}}\right] + dY^2\left[\frac{1}{Y} + \frac{c}{b^2}\,\frac{1}{1-\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}}\right]$$
$$+ 2\,dX\,dY\,\frac{c^2}{ab}\,\frac{1}{\left(1-\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}\right)^2}.$$

En posant

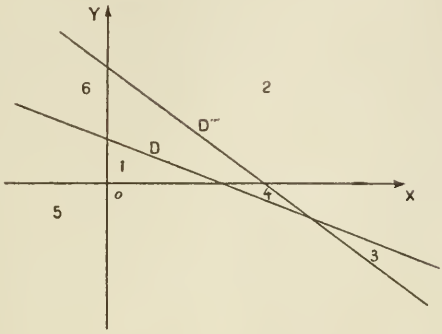
$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} D &\equiv 1 - \frac{X}{a} - \frac{Y}{b},\\ D' &\equiv 1 - \frac{X}{a} - \frac{Y}{b} + c\,\frac{X}{a^2},\\ D'' &\equiv 1 - \frac{X}{a} - \frac{Y}{b} + c\,\frac{Y}{b^2},\\ D''' &\equiv 1 - \frac{X}{a} - \frac{Y}{b} + c\,\frac{X}{a^2} + c\,\frac{Y}{b^2},\end{aligned}\right.$$

la forme quadratique (4) est *définie* (positive ou négative) si

$$XYDD'' > 0.$$

Cette inégalité définit six régions numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur la figure 3. L'inégalité $XDD' > 0$ ou $YDD'' > 0$ au choix ne

Fig. 3.



conserve que les régions 1, 2, 3. J'ai donc *trois* types de surfaces réelles, et trois seulement. A tout point de la région 1 correspond huit points réels de l'ellipsoïde; E représente donc totalement, et même huit fois, la région 1; les ellipses principales correspondent aux bords de cette région; pour tout point de la région 2, on a $X > 0$, $Y > 0$, $D < 0$; donc, à tout point réel d'une surface E_2 représentative de cette région, correspond sur E un point imaginaire (x, y réelles, z imaginaire pure); de même pour tout point réel d'une surface E_3 de la région 3, on trouve sur E un point imaginaire (x, z réelles, y imaginaires pure).

Nous verrons que le roulement de E sur E_2 ou E_3 conduit à des systèmes cycliques réels et à des systèmes triples orthogonaux réels aussi. J'indiquerai au second Chapitre des types effectifs de surfaces E_2 et E_3.

J'ai posé la question suivante : Pour chaque région d'un ds^2 réduit, peut-on trouver une (ou plusieurs) surface la représentant totalement ? Dans le cas d'un ds^2 à courbure totale toujours positive, jamais nulle ni infinie, les travaux de M. H. Weyl [1] éta-

[1] *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft* in Zurich, 1916. Pour la sphère, par exemple, il existe des surfaces de révolution, admettant deux points coniques, fermées et convexes, représentant elles aussi tout le ds^2 de la sphère, au sens que j'ai adopté.

blissent qu'il existe effectivement *une et une seule* surface fermée convexe proprement dite (sans points singuliers, sans points coniques, sans points de pincement) représentant complètement la région. L'existence de l'ellipsoïde comme unique surface représentative de la région 1 entraîne donc qu'il n'y a aucune surface, à plusieurs nappes, représentant tout le ds^2 (4) dant toute son étendue, c'est-à-dire dans les trois régions complètes. Toute surface représentative de la région 1 ne pourra la représenter totalement qu'à condition de présenter certaines singularités plus ou moins compliquées. En voici un exemple dû à Peterson [1]. Les formules

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{B^2-C^2}\,\sin q\cos p,\\ &\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{z} = \frac{C}{\sqrt{B^2-C^2}}\log\operatorname{tang}\frac{q}{2},\\ &x = \int\sqrt{A^2\cos^2 p + C^2\sin^2 p}\,dp \end{aligned}\right.$$

donnent une surface applicable sur l'ellipsoïde E ($B > C$)

$$(7)\qquad X = A\sin p,\qquad Y = B\cos p\sin q,\qquad Z = C\cos p\cos q.$$

La surface (6) représente toute la région 1, quatre fois; elle s'enroule asymptotiquement autour de l'axe des x qui correspond à la section principale de E par le plan $Y = 0$ et elle ne recouvre que la moitié de E relative à $Y > 0$, ou à $Y < 0$, suivant la façon dont on l'étale sur E.

(*A suivre.*)

---

[1] *Annales de Toulouse*, 1905, p. 71. Darboux, dans le Tome I (seconde édition) de la *Théorie des Surfaces*, p. 183, ne signale que l'analyse des travaux de Peterson parue en 1903 aux *Annales de Toulouse*. Des Mémoires étendus de Peterson ont été traduits en 1905 dans ces *Annales*. Peterson a été le premier à signaler les applications imaginaires de surfaces réelles, mais en se bornant aux quadriques et sans en tirer de conséquences.

1ère Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BUHL (A.). — Géométrie et analyse des intégrales doubles. Un vol. de la collection Scientia (Gauthier-Villars, éditeur).

Voici un Ouvrage utile, de nature à intéresser les personnes seulement curieuses de mathématiques, et aussi les gens du métier.

Comme l'auteur le fait remarquer, le titre est un peu vague; en réalité, il s'est appliqué à tirer des conséquences de l'identité

$$(1) \qquad \int\int_S dX\,dY = \int_C X\,dY.$$

Ce programme, lui-même, pourrait comprendre des théories qui ne sont pas abordées ici, par exemple les questions analogues au problème de Dirichlet.

Dès le début, M. Buhl introduit une notation qui lui rend de grands services, celle des *déterminants symboliques*. C'est ainsi qu'il écrit la formule de Riemann (ou de Green)

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dx\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy,$$

et celle de Stokes

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$d\sigma$ étant l'élément d'aire, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale. Il serait peut-être avantageux, dans certaines questions, de modifier ce symbolisme, en remarquant que $dx\,dy$ est soumis aux mêmes règles de calcul que les déterminants de différentielles.

Les deux formules ci-dessus deviendraient ainsi

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy & \frac{\partial}{\partial x}\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\delta y \\ P\,dx + Q\,dy & P\,\delta x + Q\,\delta y \end{vmatrix} = \int_C P\,dx + Q\,dy,$$

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz & \frac{\partial}{\partial x}\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\delta y + \frac{\partial}{\partial z}\delta z \\ P\,dx + Q\,dy + R\,dz & P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z \end{vmatrix}$$
$$= \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz;$$

l'écriture serait plus longue [1], mais la généralisation à une intégrale double étendue à une multiplicité de l'espace à n dimensions se fait plus facilement.

Quoi qu'il en soit, la notation de M. Buhl permet de condenser des formules généralisant celle de Stokes. En remplaçant dans (1) X et Y par des fonctions de x, y, z, p, q, il obtient une formule dans laquelle l'intégrale double porte sur une fonction linéaire de r, s, t, $rt - s^2$, exprimée par un déterminant du cinquième ordre, ou, avec une notation plus symétrique, du sixième; l'intégrale simple porte sur une combinaison linéaire de dx, dy, dz, dp, dq.

S'attachant d'abord à la formule de Stokes, l'auteur en déduit de nombreux volumes qui s'expriment par des intégrales simples : volumes cylindriques, volumes canaux, etc. Une application très intéressante est celle qui se rapporte aux aires sphériques. Y a-t-il pour ces aires quelque chose d'analogue à la mesure d'un angle plan par la demi-différence des arcs interceptés par ses côtés sur une circonférence? M. Buhl rapporte les résultats obtenus par M. Humbert, dans un de ces Mémoires élégants et pénétrants comme il en a écrit beaucoup, et comme, à la suite de ses dernières publications dans les *Comptes rendus*, on s'attendait à lui en voir écrire encore sur l'Arithmétique supérieure, s'il n'avait été enlevé prématurément à la Science. Les généralisations du théorème d'Abel aux intégrales doubles et les applications aux aires ellipsoïdales, citées encore par M. Buhl, sont dues aussi au même si regretté géomètre.

---

(1) On pourrait, d'ailleurs, l'abréger.

S'attachant ensuite à la formule qui fait intervenir les dérivées secondes, M. Buhl montre qu'elle conduit à la formule de Bonnet, où l'intégrale simple dépend de la courbure géodésique, tandis que l'intégrale double porte sur la courbure totale. Il donne ensuite des formules analogues pour la torsion géodésique et la courbure normale. Enfin il démontre, toujours par la même voie, une formule de M. Appell, où l'intégrale double contient la courbure moyenne.

Les équations de Monge-Ampère peuvent toujours se mettre sous forme intégrale, avec une intégrale simple et une double : ce résultat, établi par l'auteur dans les *Annales de Toulouse*, lui permet de rattacher les équations de Monge-Ampère à son sujet ; il en indique quelques propriétés.

Enfin, passant aux variables complexes et introduisant la considération des singularités des fonctions à intégrer, M. Buhl est conduit à donner une idée de certaines questions traitées par M. Picard dans la théorie qu'il a fondée, des fonctions algébriques de deux variables.

Souhaitons que ce petit volume attire de nouvelles recherches sur quelques-unes des intéressantes questions qu'il rassemble si ingénieusement.

GEORGES GIRAUD.

MÉLANGES.

APPLICABILITÉ DES SURFACES RÉELLES. ÉTUDE SPÉCIALE DE LA CORRESPONDANCE ENTRE POINT RÉEL ET POINT IMAGINAIRE. SYSTÈMES CYCLIQUES RÉELS ET SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX CORRESPONDANTS

(*suite*);

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

Si l'on se sert des coordonnées homofocales pour l'ellipsoïde

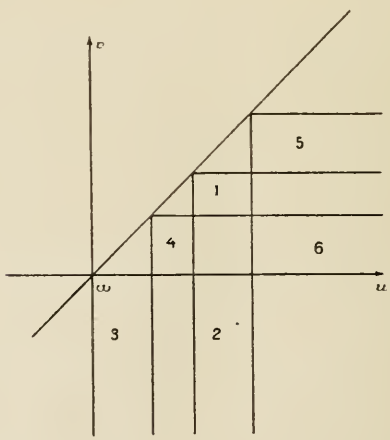
$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

on trouve aisément le ds^2

$$(8)\quad ds^2 = \frac{u-v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a-u)(b-u)(c-u)} - \frac{v\,dv^2}{(a-v)(b-v)(c-v)}\right]$$

qui, bien que non réduit, permet de retrouver aisément les ré-

Fig. 4.



gions 1, 2, 3 (*fig.* 4) et qui est commode pour le calcul de la cour-

bure totale : on trouve $\frac{abc}{u^2 v^2}$: les surfaces E_2 et E_3 ont leurs lignes asymptotiques (régulières) toujours imaginaires : cette expression de la courbure montre que pour les régions 2 et 3 la méthode de M. Weyl ne peut rien donner.

Il est intéressant de remarquer que, dans les régions 4, 5, 6, le ds^2 (4) ou (8) est défini, négatif. Si nous considérons donc l'ellipsoïde E′

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + 1 = 0,$$

complètement imaginaire, mais réel au sens de M. Goursat, le ds^2 de E′ s'obtient évidemment en changeant de signe le ds^2 de E, puisque E et E′ s'échangent par homothétie de pôle O et de rapport i. Donc il existe trois types de surfaces réelles E_4, E_5, E_6 correspondant aux régions 4, 5, 6 et au ds^2 de E′. La surface E′, en roulant sur ces surfaces réelles donne des systèmes cycliques réels. Cette remarque est générale : quand on applique la méthode du ds^2 réduit, on pourra d'abord chercher les régions définies par $EG - F^2 > 0$: l'inégalité $E > 0$ les départage en des régions correspondant au ds^2,

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

ou au ds^2,

$$-(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2).$$

Une autre remarque simple se présente naturellement : le ds^2 réduit n'est pas unique : toute transformation biuniforme entre les paramètres (u, v) et d'autres (U, V) transforme un ds^2 réduit en un autre de même définition. Or les deux formes quadratiques

$$(9) \qquad \begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ E\,du^2 - 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \end{cases}$$

définissent le même nombre de *régions*, le même nombre de *types* de surfaces réelles. Sur une surface S du premier ds^2 et sur une surface S′ du second ds^2, correspondant à la même région, les réseaux coordonnés ont la même longueur, se composent de mailles de même aire, mais l'angle de deux lignes coordonnées, étant V sur S, est π — V sur S′. Si l'on passe d'un système (u, v), non orthogonal bien entendu, à un autre (U, V) les surfaces S ne changent

pas, mais les surfaces S′ correspondantes, avec les variables (U, V) sont totalement changées.

10. Pour un ds^2 de révolution ou de courbure totale constante, la notion de ds^2 réduit cesse d'avoir son étendue; il est clair que la transformation intrinsèque du ds^2 correspondant à un glissement sur elle-même d'une surface représentative ne peut disparaître. Tout au plus, pour des surfaces qui ont un plan de symétrie équatorial, par exemple, peut-on faire disparaître toute transformation intrinsèque autre que celle relative au glissement continu. Mais tout ce qui a été dit précédemment ne disparaît pas totalement.

Supposons, par exemple, que l'ellipsoïde E devienne de révolution : si l'on suppose $a = b > c$, ce qui correspond à l'ellipsoïde aplati, D et D‴ deviennent parallèles, il n'y a plus que les régions 1 et 2 qui restent; il y a deux types seulement de surfaces réelles. Les régions 4, 5, 6 subsistent, mais 4 et 5 étant équivalentes, on ne trouve encore à la limite que deux types pour l'ellipsoïde imaginaire E′. Si l'on suppose $a > b = c$, ce qui correspond à l'ellipsoïde allongé, D‴ devient parallèle à l'axe des Y, les régions 1, 2, 3 restent, mais on voit immédiatement que 2 et 3 sont équivalentes : en effet à la région 2 correspondent des points $m\,(\xi_0, \eta_0, i\zeta_0)$ de E, ξ_0, η_0, ζ_0 étant réelles. Si l'on fait tourner E de $\frac{\pi}{2}$ autour de Ox, ce point m est remplacé par le point $m'\,(\xi_0, -i\zeta_0, \eta_0)$ correspondant à la région 3; or, toute surface réelle E_2 pourra être aussi considérée comme surface E_3 si l'on associe le point réel M de E_2 à m' au lieu de m. De même ici pour E′, il reste deux régions, à savoir 5 et les deux régions 4, 6 devenues équivalentes. Ceci suffit pour apprécier l'intérêt de la méthode même dans le cas réservé où cette notion de ds^2 réduit manque de précision.

On vérifie aisément que les hyperboloïdes et paraboloïdes qui ne sont pas de révolution définissent aussi trois types; deux seulement s'ils sont de révolution ou s'il s'agit du paraboloïde hyperbolique équilatère.

Il y a deux autres quadriques remarquables que l'on sait déformer complètement : ce sont les deux paraboloïdes imaginaires ayant pour équation

$$y(y + iz) = x \qquad \text{ou} \qquad (y + iz)x = y - iz;$$

il existe une infinité de surfaces réelles ayant même ds^2 que l'un ou l'autre; le premier définit deux régions, le second une seule. Toute surface, applicable sur l'un ou l'autre, admet, si elle est réelle, soit une ligne d'arrêt, soit une auto-application. Il n'existe aucune surface algébrique réelle applicable sur le premier [1].

11. Je donne un autre exemple intéressant correspondant au cas où il n'y a qu'une région, ne coïncidant pas bien entendu avec l'ensemble du plan, et nous constaterons qu'il existe des surfaces réelles représentant deux fractions séparées de cette région, se correspondant par suite point réel pour point imaginaire. Il s'agit des deux surfaces de translation :

$$(10)\qquad S\begin{cases} x = t^3 + 3mt^5 + t_1^3 + 3m_1 t_1^5, \\ y = (1-t^2)^{\frac{3}{2}}(1+2m+3mt^2), \\ z = (1-t_1^2)^{\frac{3}{2}}(1+2m_1+3m_1 t_1^2); \end{cases}$$

$$(11)\qquad S_1\begin{cases} x_1 = \mu(t^3+3mt^5) + \dfrac{1}{\mu}(t_1^3+3m_1 t_1^5), \\ y_1 = (1-\mu^2 t^2)^{\frac{3}{2}}\left[\dfrac{1}{\mu^2} + \dfrac{2m}{\mu^4} + \dfrac{3m}{\mu^2}t^2\right], \\ z_1 = \left(1-\dfrac{t_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}[\mu^2 + 2m_1\mu^4 + 3m_1\mu^2 t_1^2]. \end{cases}$$

m et m_1 sont deux constantes réelles données; μ est une constante, réelle ou imaginaire pure; pour chaque valeur réelle de μ, on a une surface réelle S_1 se déformant d'une façon continue, coïncidant avec S pour $\mu = 1$, applicable physiquement sur une fraction de S pour les autres valeurs réelles de μ. Pour μ imaginaire pure, S_1 reste toujours applicable sur S et reste réelle, mais les points réels de S_1 s'obtenant, cette fois, pour des valeurs imaginaires pures de t et t_1, correspondent aux points imaginaires de S (y et z réelles, x imaginaire pure). Le roulement de S sur S_1 ou de S_1 sur S définit dans le cas actuel, comme nous le verrons plus loin, *soixante-quatre* systèmes cycliques réels, tous algébriques, ainsi que les systèmes triples orthogonaux correspondants.

---

[1] M. Thybaut a étudié le premier paraboloïde aux *Annales de l'Ecole* (1900); Weingarten a étudié le second.

Le ds^2 commun de S et S_1 est

$$(12)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & 9t^2(1+5mt^2)^2\,dt^2 + 9t_1^2(1+5m_1t_1^2)^2\,dt_1^2 \\ & + 18t^2t_1^2(1+5mt^2)(1+5m_1t_1^2)\,dt\,dt_1. \end{aligned}$$

Le ds^2 réduit s'obtiendra en écrivant

$$(13)\qquad T = t^2, \qquad T_1 = \frac{t_1}{t}.$$

Si l'on remarque que l'on a

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} & t^2 = T, \qquad t_1^2 = TT_1^2, \qquad tt_1 = TT_1, \\ & 2t\,dt = dT, \qquad 2t_1\,dt_1 = T_1^2\,dT + 2TT_1\,dT_1, \\ & ds^2 = 9[(1+5m_1t_1^2)t_1\,dt_1 + tt_1(1+5mt^2)t\,dt]^2 \\ & \qquad + 9(1+5mt^2)^2t^2\,dt^2(1-t^2t_1^2), \end{aligned} \right.$$

le calcul de transformation se fait à vue et donne une unique condition pour que le ds^2 réduit soit positif :

$$1 - T^2T_1^2 > 0.$$

On trouve dans le plan ωTT_1 une région unique limitée par deux hyperboles équilatères conjuguées, comprenant leur centre commun. Nous avons, dans cette région unique, une infinité de surfaces algébriques ne se recouvrant physiquement sur aucune étendue (μ réel et μ imaginaire pure) [1]. Ce ds^2 réduit est de la forme

$$(15)\qquad ds^2 = A\,dT^2 + 2B\,dT\,dT_1 + C\,dT_1^2,$$

où A, B, C sont des polynomes entiers en T et T_1; toute surface réelle représentative admet ou des auto-applications ou une ligne d'arrêt; il serait intéressant de voir s'il existe une surface réelle représentant complètement la région unique.

12. Plusieurs conséquences importantes découlent de cette étude :

a. Une surface qui n'a ni ligne d'arrêt, ni auto-application, donne une représentation parfaite de son ds^2. — Si une telle surface S est connue, il faudra peut-être la considérer comme formée de plusieurs feuillets superposés, pour qu'une autre surface réelle S_1 de même ds^2 puisse être complètement étalée sur S. En prenant la surface minima correspondant, avec les notations de Weierstrass, à la fonc-

[1] Deux surfaces correspondant à μ réel se recouvrent partiellement; de même deux surfaces correspondant à μ imaginaire pure.

tion $\mathfrak{F}(u) = 3i + 12mu$, on a une surface minima ne coïncidant avec aucune de ses associées, si m est réel, et par suite n'ayant aucune auto-application. Cette surface S n'a qu'une nappe réelle; si donc une surface S_1, applicable sur S, a plusieurs nappes, chacune est individuellement applicable physiquement sur S; il n'existe pas de surface Σ à plusieurs nappes telles que S puisse recouvrir une nappe de Σ et non les autres. Ici la surface S est à courbures opposées et nous constatons que toute surface minima associée à S est équivalente à S comme représentation du ds^2. Le ds^2 d'une surface étudiée dans cette rubrique *a* est nécessairement *réduit*, si la surface est rapportée à une représentation propre; ce sont précisément les représentations impropres qui conduiraient aux surfaces réelles ne la recouvrant qu'en partie.

b. Une nappe unique de surface, qui n'a pas de ligne d'arrêt asymptotique singulière, qui n'a pas de ligne de rebroussement asymptotique singulière avec auto-application conservant chaque point de cette ligne donne encore une représentation parfaite de son ds^2, du moins pour une région éventuelle de son ds^2.

Ainsi le paraboloïde de révolution $\mathfrak{P}$ (formé d'un nombre de feuillets arbitrairement grand) offre logement à la totalité de toute nappe réelle applicable physiquement sur lui; pourtant il existe des surfaces constituées de deux nappes, exactement, dont l'une ne peut se loger sur $\mathfrak{P}$; une telle surface peut être considérée comme représentant mieux le ds^2, si l'on envisage l'ensemble des deux régions correspondant à $\mathfrak{P}$, mais si l'on se borne à la région propre à $\mathfrak{P}$, c'est $\mathfrak{P}$ qui donne la meilleure représentation, d'ailleurs totale.

Sans aucune recherche analytique, *par un simple regard*, on pourra donc décider qu'un grand nombre de surfaces simples donnent (au moins pour une région) une représentation physique parfaite du ds^2 : par exemple quadriques, tore, surfaces de révolution dont la méridienne n'a pas de point d'arrêt ou n'admet aucune tangente de rebroussement perpendiculaire à l'axe de rotation et axe de symétrie de cette méridienne, etc.

c. Il y a, au cours d'une déformation au sens de Gauss, des singularités permanentes ou accidentelles :

Une ligne d'arrêt non asymptotique singulière, une ligne de rebroussement ne possédant pas les deux caractères simultanés

si souvent énoncés, sont des singularités permanentes; j'entends par là que Γ étant une telle ligne supposée réelle, tout arc de Γ resté réel et déformé en un arc Γ_1 conserve la propriété.

Au contraire, on peut, par déformation, prolonger en général une surface au delà d'une ligne d'arrêt asymptotique singulière ou au delà d'une ligne de rebroussement qui a les deux caractères rappelés : on forme le ds^2 réduit et si la ligne en question ne correspond pas à une frontière de région du ds^2 réduit, nous savons, d'après le paragraphe 7, *prolonger* la représentation du ds^2 avec des surfaces réelles en nombre infini. Ceci serait en défaut si la ligne correspondait à une frontière. Les singularités de cette espèce, sauf cette dernière réserve, sont donc en général accidentelles.

Les singularités permanentes seront mises en évidence automatiquement par la formation du ds^2 réduit et figurent parmi les frontières de région. On a des exemples simples en prenant la courbe plane $z = \frac{1}{\log(x-1)}$ et la faisant tourner autour de l'axe des z; le parallèle obtenu pour $z = 0$ et $\sqrt{x^2+y^2} = 1$ est une ligne d'arrêt, géodésique. Si l'on veut éviter une surface de révolution, il suffit de prendre une surface de translation dont l'un des réseaux générateurs est engendré par cette courbe. Le même procédé réussit avec la courbe

$$z = \frac{x-1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$$

qui donne une ligne anguleuse pour $x = 1$, $z = 0$.

d. Une question délicate serait de déterminer ce qui correspond à une courbe frontière de région d'un ds^2 donné. Pour l'ellipsoïde nous avons obtenu les ellipses principales : chacune d'elles a tous ses points invariants dans une certaine auto-application de la surface. Dans d'autres cas, on peut avoir une singularité plus compliquée, ligne d'arrêt, ou bien ligne atteinte asymptotiquement, comme pour la surface (6) qui recouvre l'ellipsoïde. Toute courbe tracée sur une surface auto-applicable, dont chaque point reste invariant dans une auto-application, conserve nécessairement cette propriété dans une déformation quelconque, à moins de devenir ligne d'arrêt (atteinte asymptotiquement ou non); de telles courbes concourent nécessairement comme frontières des régions.

Il résulte aussi de là que si une région située tout entière à distance finie est limitée par un contour constitué de m courbes, toute surface sans ligne d'arrêt représentative de la région complète, s'il en existe toutefois, aura nécessairement ses points associés par groupes de points en nombre hp^m, où h et p sont deux entiers, se correspondant dans des auto-applications de la surface.

Ce qui précède peut subir de légères modifications dans le cas des ds^2 de révolution ou à courbure totale, puisque le ds^2 réduit cesse alors d'être bien défini. Par exemple, tout méridien d'une surface de révolution se conserve dans une auto-application déterminée de la surface, sans pour cela intervenir comme frontière de région.

CHAPITRE II.

1. Je crois utile de vérifier les résultats, obtenus jusqu'ici, par de nombreux exemples concrets, que nous fourniront les surfaces classiques.

Prenons par exemple les surfaces signalées par Sophus Lie, cas particuliers de celles qui admettent une infinité de générations comme surfaces de translation. Les trois surfaces

$$(1)\qquad \begin{cases} e^x + e^y + e^z = 1, \\ e^x + e^y - e^z = 1, \\ e^x - e^y - e^z = 1 \end{cases}$$

sont manifestement *égales*, donc applicables : la translation $(0, 0, i\pi)$ ou $(0, i\pi, i\pi)$ transforme la première dans la seconde ou troisième : tout point réel de chacune a son homologue imaginaire sur chacune des deux autres. En posant $e^x = X$, $e^y = \varepsilon Y$, $e^z = \varepsilon' Z$ où ε et ε' désignent ± 1, on peut condenser les trois équations en l'unique équation $X + Y + Z = 1$ et l'on a

$$(2)\qquad ds^2 = \frac{dX^2}{X^2} + \frac{dY^2}{Y^2} + \frac{dZ^2}{Z^2}.$$

Pour avoir le ds^2 réduit, il suffit manifestement d'introduire les fonctions symétriques de X, Y, Z; nous supposerons que X, Y, Z soient racines de

$$(3)\qquad S^3 - S^2 + uS - v = 0.$$

On en conclut

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{c} (3S^2 - 2S + u)\,dS = dv - S\,du, \\ dx = \dfrac{dX}{X} = \dfrac{dv - X\,du}{X(3X^2 - 2X + u)} = \dfrac{dv - X\,du}{X(X-Y)(X-Z)}, \\ ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ E = \dfrac{\Sigma(Y-Z)^2}{P}, \quad -F = \dfrac{\Sigma YZ(Y-Z)^2}{XYZP}, \quad G = \dfrac{\Sigma Y^2Z^2(Y-Z)^2}{X^2Y^2Z^2P}, \end{array}\right.$$

en posant

$$P = (Y-Z)^2(Z-X)^2(X-Y)^2.$$

On vérifie aisément

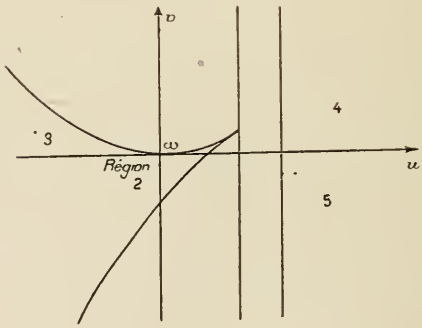
$$(5)\quad \left\{\begin{array}{c} EG - F^2 = \dfrac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2Y^2Z^2P}, \\ \Sigma X^2 = 1 - 2u, \qquad \Sigma(Y-Z)^2 = 2(1-3u), \\ -P = 4\left(u - \dfrac{1}{3}\right)^3 + 27\left(\dfrac{u}{3} - v - \dfrac{2}{27}\right)^2. \end{array}\right.$$

Les inégalités $E > 0$, $EG - F^2 > 0$ reviennent donc à

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{c} (3u-1)[4(3u-1)^3 + (9u - 27v - 2)^2] > 0, \\ (2u-1)(3u-1) > 0. \end{array}\right.$$

La courbe $P = 0$ se construit aisément en posant $1 - 3u = t^2$ et $9u - 27v - 2 = 2t^3$; elle est tangente à l'axe ωu (*fig.* 5) à

Fig. 5.



l'origine et admet un point de rebroussement $u = \frac{1}{3}$, $v = \frac{1}{27}$. Avec l'axe ωu et les deux droites $2u - 1 = 0$, $3u - 1 = 0$ on obtient cinq régions (1, 2, 3, 4, 5) donnant cinq types de surfaces; la

région 1 est la petite région comprise entre l'axe ωu et les deux arcs de courbe qui sont issus du point de rebroussement; les régions 1, 2, 3 sont représentées totalement par les trois surfaces (1) dans le même ordre; pour chaque point de la région 4 on trouve une racine positive et deux racines imaginaires conjuguées pour l'équation (3); on en conclut qu'avec le changement de coordonnées

$$(7) \qquad y = \frac{y_1 - z_1}{\sqrt{2}}, \qquad z = \frac{y_1 + z_1}{\sqrt{2}},$$

la première équation (1) prend la forme équivalente

$$(8) \qquad e^x + 2\, e^{\frac{y_1}{\sqrt{2}}} \operatorname{ch} \frac{z_1}{\sqrt{2}} = 1,$$

et que pour tout point réel d'une surface réelle représentative de la région (4), on obtient sur la première surface (1) un point imaginaire (x, y_1 réelles et z_1 imaginaire pure), d'où système cyclique réel. Remarque analogue pour la région 5 et la seconde équation (1).

2. La déformation des quadriques offre un intérêt géométrique considérable : il me suffira de rappeler les travaux de Darboux, de M. Guichard en France et de M. Bianchi. Au Chapitre I, [§ 9, formule (6)], j'ai emprunté à Peterson une surface recouvrant physiquement l'ellipsoïde réel; Peterson montre qu'avec de légers changements on obtient des surfaces réelles dont les points réels s'obtiennent avec des valeurs imaginaires pures de p ou $p - \frac{\pi}{2}$ et de q ou $q - \frac{\pi}{2}$; on a ainsi des surfaces réelles correspondant aux régions 2 et 3 de l'ellipsoïde; je renvoie au Mémoire de Peterson. Ces surfaces ne renferment pas de paramètre; il est facile avec la méthode même de Peterson d'obtenir des surfaces contenant un paramètre arbitraire. Je reprends la méthode telle que Darboux l'expose (Tome I seconde édition, de la *Théorie des surfaces*, page 182). Soit l'ellipsoïde E représenté par les équations paramétriques

$$(9) \qquad x = l \cos u \cos v, \qquad y = m \cos u \sin v, \qquad z = n \sin u,$$

avec l'hypothèse $n > m > l > 0$.

Nous définissons une surface x_1, y_1, z_1 applicable sur E par les formules

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1 = \rho\cos u\cos\theta, \qquad y_1 = \rho\cos u\sin\theta, \\ z_1 = \displaystyle\int\sqrt{u^2\cos^2 u - h\sin^2 u}\,du, \end{cases}$$

h étant une constante quelconque et ρ et θ étant deux fonctions de la seule variable v définies par

$$(11)\qquad \begin{cases} \rho^2 = l^2\cos^2 v + m^2\sin^2 v + h, \\ \left(\dfrac{d\theta}{dv}\right)^2 = \dfrac{h(l^2\sin^2 v + m^2\cos^2 v) + l^2m^2}{(h + l^2\cos^2 v + m^2\sin^2 v)^2}. \end{cases}$$

Pour $h = 0$, on retrouve purement et simplement l'ellipsoïde E; h variant d'une façon continue de 0 à $-l^2$, on trouve une surface réelle recouvrant tout l'ellipsoïde; pour être tout à fait exacts, remarquons que les sections horizontales de E restent les sections horizontales de la nouvelle surface et que les sections de E par des plans pivotant autour de Oz restent planes, dans des plans contenant Oz; pour avoir l'ellipsoïde, on fera varier u de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, auquel cas z_1 varie entre deux limites $-H$ et $+H$, et v de 0 à 2π, auquel cas θ varie de 0 jusqu'à une certaine valeur α; le morceau E_1 de surface ainsi obtenu est compris entre deux plans méridiens formant un angle α et l'on obtient toute la surface analytique en le faisant tourner de l'angle α, 2α, 3α, ... autour de Oz et le faisant glisser de la quantité $2H$, $4H$, $6H$, ... dans l'un ou l'autre sens de long de Oz. Si l'on néglige ce glissement, et si l'on suppose α commensurable avec π, on obtient une surface fermée, convexe, avec deux points coniques sur l'axe des z à la cote H ou $-H$, totalement applicable sur E : la présence des deux points coniques explique qu'il n'y a pas contradiction avec les résultats de M. Weyl. Ici on a

$$(12)\qquad \begin{aligned} \alpha &= 2\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{h(l^2\sin^2 v + m^2\cos^2 v) + l^2m^2}}{h + l^2\cos^2 v + m^2\sin^2 v}\,dv \\ &= 4\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{l^2m^2(1+X^2) + h(l^2X^2 - m^2)}}{[h + l^2 + (h + m^2)X^2]\sqrt{1+X^2}}\,dX; \end{aligned}$$

on voit aussitôt que α est égal à 2π pour $h = 0$ et qu'il est infini-

ment grand pour h infiniment voisin de $-l^2$; il y aura donc une infinité de valeurs de h comprises entre o et $-l^2$ donnant une surface fermée à points coniques. Pour la valeur $h = -l^2$, on trouve, aux différences de notation près, la surface déjà indiquée s'enroulant asymptotiquement autour de l'un des axes. On voit qu'avec la variable $X = \operatorname{tang} v$, θ s'exprime par une intégrale indéfinie [deuxième formule (12)] du type elliptique; θ admet deux périodes cycliques, l'une imaginaire, l'autre α réelle et deux périodes logarithmiques précisément égales à π: il résulte de là que les surfaces obtenues sont toujours transcendantes.

Les résultats obtenus par la considération des régions vont nous guider pour trouver sans effort quel champ doivent décrire u et v, avec un choix convenable de h, pour trouver une surface réelle E_2 ou E_3 (*voir* Chap. I, § 9). Pour un point réel de E_2, on doit avoir sur E la coordonnée x relative au petit axe imaginaire pure, y et z étant réelles, d'où $\sin u$ réel, $\operatorname{tang} v$ imaginaire pure ainsi que $\sin v$ et $\cos u$. On devra donc poser $u = \frac{\pi}{2} - iu'$, $v = iv'$ où u' et v' sont réelles, et pour que le point de la surface E_2 soit réel il faut alors que θ soit réel et ρ imaginaire pure : on posera donc $\rho = -i\rho_2$ et j'aurai avec ces changements dans les formules (10) et (11), en écrivant aussi $h = -h'$,

$$(13)\quad \begin{cases} x_2 = \rho_2 \operatorname{sh} u' \cos\theta, \qquad y_2 = \rho_2 \operatorname{sh} u' \sin\theta, \\ z_2 = \int \sqrt{(n^2 - h')\operatorname{sh}^2 u' - h'}\, du'; \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \rho_2^2 = (m^2 - l^2)\operatorname{ch}^2 v' + h' - m^2, \\ d\theta = \dfrac{\sqrt{h'(m^2 - l^2)\operatorname{ch}^2 v' + l^2(h' - m^2)}}{\rho_2^2}\, dv'. \end{cases}$$

En prenant θ réel pour v' réel, j'ai une surface réelle sous la seule condition $n^2 > h' > 0$, et alors il faudra se borner un champ

$$\operatorname{sh} u' > \sqrt{\frac{h'}{n^2 - h'}}, \qquad \operatorname{ch} v' > \frac{l}{\sqrt{h'}}\sqrt{\frac{m^2 - h'}{m^2 - l^2}}$$

si l'on a $0 < h' < l^2$, et au champ $\operatorname{sh} u' > \sqrt{\frac{h'}{n^2 - h'}}$ sans restriction pour v' si $l^2 < h' < n^2$. Pour les valeurs $h' = l^2$ ou $h' = m^2$, les intégrations se simplifient. On a ainsi une surface réelle E_2

qui se déforme progressivement quand h' varie de o à n^2 et dont on vérifie aisément qu'elle est bien analytiquement distincte de la surface E_1 définie par (10) et (11), mais elle ne diffère de E_1 que par une certaine rotation imaginaire pure autour de Oz [1]. Le roulement de E sur E_2 définit des systèmes cycliques réels.

La même méthode appliquée à la recherche des surfaces réelles E_3 montre qu'avec l'exemple traité ici il faudra poser

$$u = \frac{\pi}{2} - iu'', \qquad v = \frac{\pi}{2} - iv'', \qquad \rho = -i\rho_3,$$

u'', v'', ρ_3 étant réels et l'on aura

$$(15)\quad \begin{cases} x_3 = \rho_3 \operatorname{sh} u'' \cos\theta, \qquad y_3 = \rho_3 \operatorname{sh} u'' \sin\theta, \\ z_3 = \displaystyle\int \sqrt{(n^2 - h')\operatorname{sh}^2 u'' - h'}\, du''; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \rho_3^2 = h' - m^2 - (m^2 - l^2)\operatorname{sh}^2 v'', \\ d\theta = \dfrac{\sqrt{l^2(h' - m^2) - h'(m^2 - l^2)\operatorname{sh}^2 v''}}{\rho_3^2}\, dv''. \end{cases}$$

et l'on prendra z_3 et θ réels pour u'' et v'' réels. Il est nécessaire ici que h' soit compris entre m^2 et n^2 et l'on se réduira au champ

$$\operatorname{sh}^2 u'' > \frac{h'}{n^2 - h'}, \qquad \operatorname{sh}^2 v'' < \frac{l^2}{h'}\,\frac{h' - m^2}{m^2 - l^2}.$$

la surface E_3 définit des systèmes cycliques réels. Dans le cas où h' est compris entre m^2 et n^2, il existe simultanément des surfaces E_2 et E_3 réelles correspondant à une même valeur de h' : E_2 et E_3 peuvent se ramener l'une à l'autre par une rotation imaginaire pure autour de Oz.

La méthode appliquée par Peterson aux quadriques s'applique encore en prenant les sections planes parallèles aux deux autres sections principales; on trouverait ainsi d'autres surfaces des types E_1, E_2, E_3. On traiterait de même les hyperboloïdes ou para-

---

[1] Il faut entendre par là que si l'on a $0 < h' < l^2$, de façon qu'il existe à la fois des surfaces E_1 et E_2 réelles, une surface E_1 donnée comprend une seule nappe réelle et des nappes imaginaires; si cette surface E_1 subit une rotation imaginaire pure égale à la période imaginaire pure de l'intégrale elliptique considérée plus haut, la nappe réelle de E_1 disparaît et une nappe réelle apparaît : cette nappe est la surface E_2.

boloïdes. Nous remarquerons en passant que, pour l'ellipsoïde, nous n'avons pas trouvé de surface représentative complètement de la région 2 ou 3.

3. Dans les deux exemples qui précèdent, surfaces de translation de Sophus Lie ou quadriques, nous avons rencontré des surfaces qui, en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées semi-polaires, ont deux coordonnées égales, les troisièmes ne différant que par une constante imaginaire pure, introduite par intégration. De la sorte une translation ou rotation imaginaire imprimée à l'une des surfaces l'applique sur la seconde, en éteignant une nappe réelle et faisant surgir une nappe imaginaire.

Supposons donc r, z fonctions analytiques de deux paramètres réels u, v définies pour un certain champ de u et le champ $(-\infty, +\infty)$ pour v. Appelons V le polynome

$$(15)\qquad V(v) \equiv (v - a_1)(v - a_2)\ldots(v - a_{2p+1})(v - a_{2p+2}),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{2p+2}$ sont des constantes réelles rangées par ordre croissant. Posons

$$(16)\qquad \theta = \int \sqrt{V(v)}\, dv,$$

pour que θ soit réel, il faut et suffit que l'intervalle d'intégration soit tout entier compris dans l'un des intervalles

$$-\infty a_1;\quad a_2 a_3;\quad \ldots;\quad a_{2p+2} + \infty.$$

Je définis donc $p+2$ surfaces réelles, distinctes, $S_0, S_1, \ldots, S_{p+1}$ en posant

$$(17)\qquad \begin{cases} S_0, & \theta = \displaystyle\int_{a_1}^{v} \sqrt{V(v)}\, dv, \\ S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p+1), & \theta = \displaystyle\int_{a_{2i}}^{v} \sqrt{V(v)}\, dv. \end{cases}$$

Ces surfaces sont non seulement applicables, mais égales: cette dernière propriété est un accident : il suffit de déformer chacune.

Je vais mettre ceci à contribution pour obtenir une surface réelle Σ représentant complètement (ou même simplement partiellement) la région du ds^2 réduit qui lui correpond et suscep-

tible d'être recouverte sur $p+2$ fractions étrangères les unes aux autres par les $p+2$ surfaces respectives $S_0, S_1, \ldots, S_{p+1}$ analogues à celles de ce paragraphe; p est un entier fixe, qui pourra, en changeant Σ, être arbitrairement grand.

4. J'emploie toujours la méthode de Peterson (Darboux, *loc. cit.*, p. 182). Soient U, U_1, U_2 des fonctions de u; r, θ, φ des fonctions de v. Je pose

$$(18)\quad \begin{cases} S \quad x = U r \cos\varphi, & y = U r \sin\varphi, & z = \int U_1\, dU, \\ \Sigma \quad x_1 = U \rho \cos\theta, & y_1 = U \rho \sin\theta, & z_1 = \int U_2\, dU. \end{cases}$$

En donnant les fonctions r, φ, U, U_1 arbitrairement et calculant ρ, θ, U_2 par les formules

$$(19)\quad \begin{cases} U_2^2 = U_1^2 - h^2, \qquad \rho^2 = r^2 + h^2, \\ \dfrac{d\theta}{dv} = \dfrac{\sqrt{h^2(r'^2 + r^2\varphi'^2) + r^4\varphi'^2}}{h^2 + r^2}, \end{cases}$$

où h est une constante numérique, on reconnaît aisément que S et Σ ont le même ds^2

$$(20)\quad ds^2 = (r^2 + U_1^2)\, dU^2 + U^2(r'^2 + r^2\varphi'^2)\, dv^2 + 2 U r r'\, dU\, dv.$$

Je prends pour r un polynome entier en v et je calcule φ par

$$(21)\quad \varphi = K \int \sqrt{V(v)}\, dv,$$

où K est une constante numérique et V le polynome plus haut, formule (15); de la sorte je définis en réalité non pas une seule surface S, mais $p+2$ surfaces $S_0, S_1, \ldots, S_{p+1}$ comme il a été expliqué au paragraphe précédent. Je vais m'arranger, par un choix convenable de la constante K et du polynome $P(v)$, pour que θ soit réel pour toutes les valeurs réelles de v depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; si cela a lieu, il est clair que les valeurs de v comprises entre $-\infty$ et a_1 déterminent sur Σ une portion σ_0 suceptible d'être recouverte (en double) par S_0, les valeurs de v comprises entre a_{2i} et a_{2i+1} une portion σ_i recouverte en double par S_i, etc. Les portions σ_0, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p+1}$ sont complètement séparées sur la surface Σ.

Cherchons donc à rendre l'expression

$$(22)\qquad r'^2 + \varphi'^2\left(r^2 + \frac{r^4}{h^2}\right)$$

positive et non nulle pour toutes les valeurs réelles de v; pour celles qui rendent φ'^2 positive, la condition est automatiquement vérifiée. Il suffit d'étudier le polynome

$$(23)\qquad P'^2(v) + K^2 V\left[P^2(v) + \frac{P^4(v)}{h^2}\right]$$

dans chacun des intervalles

$$a_1 a_2;\quad a_3 a_4;\quad \ldots;\quad a_{2p+1} a_{2p+2}.$$

Choisissons P de façon que $P'(v)$ n'ait aucun zéro dans ces intervalles, ce qui est évidemment possible d'une infinité de façons: dans l'intervalle $a_1 a_2$, $P'^2(v)$ aura donc une limite inférieure L positive non nulle

$$(24)\qquad P'^2(v) \geqq L > 0.$$

L'expression $V\left[P^2(v) + \frac{P^4(v)}{h^2}\right]$ est positive dans cet intervalle, soit M sa limite supérieure, d'où

$$(25)\qquad V\left[P^2(v) + \frac{P^4(v)}{h^2}\right] \geqq -M.$$

Si donc on choisit K de sorte que $K^2 < \frac{L}{M}$, l'inégalité

$$(26)\qquad P'^2(v) + K^2 V\left[P^2(v) + \frac{P^4(v)}{h^2}\right] \geqq L - K^2 M,$$

conséquence de (24) et (25), montre que l'expression (23) est positive dans tout l'intervalle $a_1 a_2$; un calcul analogue fait pour chacun des intervalles $a_{2i+1} a_{2i+2}$ donne pour K une certaine limite supérieure; conservons pour K la plus petite, notre but sera complètement atteint.

5. Je donne un exemple numérique en prenant

$$(27)\qquad \begin{cases} U = 3u^2, & U_1 = u + \frac{1}{u}, & U_2 = u - \frac{1}{u}, \\ r = v + 1, & V = v^2 - 1, & h = 2. \end{cases}$$

En posant $v = \frac{1}{\sin w}$, on trouve aisément pour φ l'une ou l'autre des deux expressions analytiques suivantes selon qu'il s'agit de S_0 $(-\pi < w < 0)$ ou de S_1 $(0 < w < +\pi)$:

$$(28)\quad \begin{cases} S_0 \quad \varphi = -\frac{K}{2}\left[L\,\mathrm{tang}\left(\frac{-w}{2}\right) + \frac{\cos w}{\sin^2 w}\right], \\ S_1 \quad \varphi = -\frac{K}{2}\left[L\,\mathrm{tang}\,\frac{w}{2} + \frac{\cos w}{\sin^2 w}\right], \end{cases}$$

et à condition de remplacer φ par l'une ou l'autre des expressions (28), je peux condenser les équations de S_0 et S_1 en écrivant

$$(29)\quad \begin{cases} x = 3u^2(v+1)\cos\varphi, \\ y = 3u^2(v+1)\sin\varphi \qquad (S_0 \text{ ou } S_1), \\ z = 2u^3 + 6u. \end{cases}$$

On a pour Σ

$$(30)\quad \begin{cases} x_1 = 3u^2\sqrt{(v+1)^2 + \frac{1}{4}}\cos\theta, \\ y_1 = 3u^2\sqrt{(v+1)^2 + \frac{1}{4}}\sin\theta, \\ z_1 = 2u^3 - 6u, \end{cases}$$

avec

$$(31)\quad \frac{d\theta}{dv} = \frac{2\sqrt{1 + K^2(v^2-1)\left[(v+1)^2 + \frac{(v+1)^4}{4}\right]}}{(v+1)^2 + \frac{1}{4}}.$$

Pour que la valeur de $\frac{d\theta}{dv}$ soit réelle même pour $-1 < v < +1$, il suffit manifestement, puisque $1 - v^2$ est alors compris entre 0 et 1, que

$$(v+1)^2 + \frac{(v+1)^4}{4} < \frac{1}{K^2},$$

et comme le maximum du premier membre est, dans l'intervalle $(-1, +1)$ égal à 8, il suffit de supposer K inférieur à $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Le ds^2 commun des trois surfaces S_0, S_1, Σ est

$$(32)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & 36[u^2(v+1)^2 + (u^2+1)^2]\,du^2 \\ & + 9u^4[1 + K^2(v^2-1)(v+1)^2]\,dv^2 + 36u^3(v+1)\,du\,dv. \end{aligned}$$

La surface Σ représente l'élément linéaire (34) pour toutes les valeurs réelles de u et v, S_0 ne le représente que pour $v \leqq -1$ et S_1 que pour $v \geqq +1$. On pourra remarquer d'ailleurs que si l'on con-

serve $U = 3u^2$, $U_1 = u + \frac{1}{u}$ et si, au lieu de prendre $h = 2$, on prend pour h une valeur variable croissant à partir de zéro, on a pour $h = 0$ d'abord S_0 et S_1 elles-mêmes, puis pour h suffisamment petit deux surfaces Σ_0, Σ_1, déformées continues de S_0 et S_1, recouvrant deux portions isolées de la surface Σ relative à $h = 2$; le choix de $h = 2$ a été guidé par le désir de rendre U_2 rationnel; en réalité, pour que Σ représente complètement l'élément (32) pour u et v réels, il *suffit*, si l'on a pris K inférieur ou égal à $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, de calculer le nombre h_1 par la formule

$$1 + \frac{16}{h_1^2} < \frac{1}{K^2}$$

et de prendre h supérieur à h_1 mais inférieur à 2. On a donc une infinité de surfaces représentatives de toute la région du ds^2 (32) correspondant à u, v réels. On obtient le ds^2 réduit en prenant pour variables $u_1 = u^2$ et v; on a ainsi

$$(33) \qquad ds^2 = 9[u_1(v+1)^2 + (u_1+1)^2]\frac{du_1^2}{u_1} + 9u_1^3 v_1\, dv^2 + 18u_1(v+1)\, du_1\, dv,$$

en posant

$$v_1 = 1 + K^2(v^2-1)(v+1)^2.$$

La quantité v_1 est toujours positive, car pour $|v| < 1$, on a

$$v_1 > 1 - 4K^2 > \frac{1}{2};$$

la forme quadratique (33) sera donc définie positive si l'on a

$$(34) \qquad u_1\{[u_1(v+1)^2 + (u_1+1)^2]v_1 - u_1(v+1)^2\} > 0.$$

Dans l'accolade, nous avons le trinome du second degré en u_1

$$(35) \qquad v_1 u_1^2 + u_1[2v_1 + K^2(v^2-1)(v+1)^2] + v_1$$

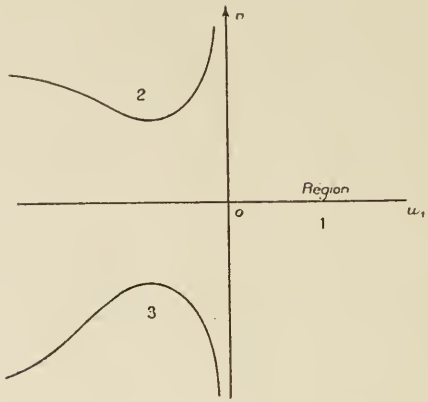
dont le discriminant est

$$(36) \quad K^2(v^2-1)(v+1)^2[4 + 4K^2(v^2-1)(v+1)^2 + K^2(v^2-1)(v+1)^4];$$

le dernier facteur est celui qui figure sous le radical dans la formule (31), il est toujours positif; donc si $|v| < 1$, le polynome (35)

est toujours positif; si $|v| > 1$ ce polynome (35) a deux racines négatives en u_1; le ds^2 (33) définit donc trois régions 1, 2, 3, la surface Σ représente complètement le demi-plan $u_1 > 0$ (*fig.* 6).

Fig. 6.



Cette surface Σ n'est pas convexe : la section de Σ par un plan contenant Oz est une cubique unicursale d'équation

$$X = mu^2, \qquad Z = 2u^3 - 6u$$

dans son plan; on vérifie de plus aisément que, pour $|u| < 1$, les deux rayons de courbure principaux sont de signe contraire, de même signe pour $|u| > 1$.

6. Le paraboloïde de révolution $\mathfrak{P}$, $x^2 + y^2 = 2pz$, possède, en commun avec un petit nombre d'autres surfaces telles que les développées des surfaces minima ou les paraboloïdes imaginaires déjà cités, cette propriété qu'on sait le déformer complètement.

Je rappelle rapidement quelques résultats [1]. Je trace sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ une courbe analytique $\mathfrak{B}$ lieu du point (c, c', c'') et la courbe conjuguée $\mathfrak{B}_1$ lieu du point (c_1, c'_1, c''_1). En désignant par ε soit $+1$, soit -1, je définis deux surfaces réelles S

[1] *Voir* mon Mémoire sur le paraboloïde (*Bulletin de la Société mathématique*, 1920-1921).

et S′ pour $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$ par les formules

$$(37)\quad \begin{cases} x = \dfrac{ip}{4}\displaystyle\int c''\,dc' - c'\,dc'' - \dfrac{ip}{4}\int c'_1\,dc'_1 - c'_1\,dc''_1 + \dfrac{\varepsilon pi}{4}(c'c''_1 - c''c'_1), \\ y = \dfrac{ip}{4}\displaystyle\int c\,dc'' - c''\,dc - \dfrac{ip}{4}\int c_1\,dc''_1 - c''_1\,dc_1 + \dfrac{\varepsilon pi}{4}(c''c_1 - c\,c''_1), \\ z = \dfrac{ip}{4}\displaystyle\int c'\,dc - c\,dc' - \dfrac{ip}{4}\int c'_1\,dc_1 - c_1\,dc'_1 + \dfrac{\varepsilon pi}{4}(c\,c'_1 - c'c_1). \end{cases}$$

Appelons H la fonction réelle, toujours supérieure ou égale à l'unité

$$H = cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1,$$

calculons par deux différentielles totales les fonctions réelles v et v_1

$$(38)\quad \begin{cases} dv = \dfrac{p}{2(H-1)}\begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 - dc \\ c' & c'_1 & dc'_1 - dc' \\ c'' & c''_1 & dc''_1 - dc'' \end{vmatrix}, \\ dv_1 = \dfrac{ip}{2(H+1)}\begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 + dc \\ c' & c'_1 & dc'_1 + dc' \\ c'' & c''_1 & dc''_1 + dc'' \end{vmatrix}, \end{cases}$$

l'application de $\mathfrak{P}$ sur S ou S′ se fait, en appelant r, θ, z les coordonnées semi-polaires d'un point de $\mathfrak{P}$, par les formules

$$(39)\qquad \mathfrak{P} \text{ sur S} \quad r = p\sqrt{\frac{H-1}{2}}, \qquad \theta = \frac{v}{p},$$

$$(40)\qquad \mathfrak{P} \text{ sur S}' \quad r = ip\sqrt{\frac{H+1}{2}}, \qquad \theta = \frac{iv_1}{p}.$$

De là résulte bien que le paraboloïde définit deux types et deux seulement de surfaces : toute surface S peut être étalée sur $\mathfrak{P}$ complètement, sans coupure ni couture ; S′ ne peut s'appliquer physiquement sur $\mathfrak{P}$. Une surface prise au hasard dans l'ensemble des surfaces S, une au hasard dans l'ensemble S′ ne peuvent se recouvrir.

Considérons maintenant deux surfaces S différentes : peuvent-elles se recouvrir physiquement ? Il suffit manifestement de les étaler toutes deux sur $\mathfrak{P}$, puis laissant l'une fixe, de faire tourner l'autre à la surface de $\mathfrak{P}$ autour de l'axe : si un point M de S et un point $\overline{M}$ de l'autre surface $\overline{S}$ donnent même valeur à H et $\overline{H}$, la

valeur de r sera la même et la rotation indiquée permettra d'appliquer S sur $\overline{S}$, M venant en $\overline{M}$. Posons donc

$$(11) \qquad c = \gamma + i\gamma_1, \qquad c' = \gamma' + i\gamma'_1, \qquad c'' = \gamma'' + i\gamma''_1,$$

on en déduit deux valeurs de H utiles pour la suite

$$(12) \qquad \begin{cases} H = (\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2) + (\gamma''^2 + \gamma_1''^2), \\ \dfrac{H - 1}{2} = \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2. \end{cases}$$

Si la courbe sphérique $\mathfrak{M}$ est réelle ou est imaginaire avec quelques points accidentellement réels, la quantité r est susceptible de s'annuler et $\mathfrak{P}$ se trouve recouvert par S au voisinage de son sommet: si la courbe $\mathfrak{M}$ ne possède aucun point réel, la quantité $\gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2$ a un certain minimum non nul et $\mathfrak{P}$ n'a aucun point recouvert sur la calotte comprise entre son sommet et le parallèle r_0 correspondant au minimum de H.

Donc, premier résultat : si l'on part de deux courbes $\mathfrak{M}$ ayant chacune des points réels (en nombre fini ou infini) les deux surfaces S et $\overline{S}$ se recouvrent physiquement sur une certaine étendue. Remarquons en passant que si S et $\overline{S}$ se recouvrent, les surfaces S' et $\overline{S}'$ associées se recouvrent elles aussi.

Second cas : $\mathfrak{M}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ ne possèdent pas toutes deux des points réels; étudions pour chacune

$$(\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2) + (\gamma''^2 + \gamma_1''^2);$$

définissons $\mathfrak{M}$ en prenant au hasard deux fonctions analytiques $c = f(t)$, $c' = g(t)$; si l'une des fonctions f ou g est définie pour toutes les valeurs du plan complexe t et est fonction soit uniforme, soit à nombre fini de déterminations et n'a qu'un nombre fini de points singuliers, nous savons que son module peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, donc $\mathfrak{P}$ est sûrement recouvert dans les régions très éloignées. Si la courbe $\overline{\mathfrak{M}}$ a été obtenue dans les mêmes conditions, on est certain que S et $\overline{S}$ se recouvrent au moins en partie dans leurs régions lointaines. Cela se réalise si $\mathfrak{M}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ sont algébriques toutes deux. *a fortiori* si S et $\overline{S}$ sont toutes deux algébriques.

Donnons, à ce propos, l'exemple le plus simple de surface algébrique, dérivé de la cubique de Lyon ou de la courbe sphérique $\mathfrak{B}$

$$(43) \qquad c = \frac{1 + K^2 - t^2}{2K}, \qquad c' = \frac{i(1 - K^2 + t^2)}{2K}, \qquad c'' = \frac{t}{K},$$

K étant réel. Si $K > 1$, pour $t = \pm\sqrt{K^2 - 1}$, le point de $\mathfrak{B}$ est réel, la surface S recouvre une portion de $\mathfrak{P}$ de forme assez compliquée, mais s'étendant du sommet de $\mathfrak{P}$ jusqu'aux points à l'infini de $\mathfrak{P}$; de la sorte, toute autre surface S applicable physiquement sur $\mathfrak{P}$ est susceptible de recouvrir S.

Si $0 < K \leqq 1$, le minimum de $\frac{H - 1}{2}$ est $\frac{(1 - K^2)^2}{4K^2}$, la surface S correspondante ne recouvre plus qu'une portion de $\mathfrak{P}$ située entre le parallèle de rayon $\rho\,\frac{1 - K^2}{2K}$ et les points à l'infini. Si donc on peut loger entièrement sur la calotte non recouverte une surface $\overline{S}$, la surface S déduite de la cubique de Lyon ($0 < K < 1$) et la nouvelle surface $\overline{S}$ ne pourront se recouvrir sur aucune étendue. Nous sommes donc conduits à chercher deux fonctions $f(t)$, $g(t)$, sans coupure, dont le module reste borné; nous supposerons, puisqu'il y a avantage à prendre le cas le plus simple possible, que les fonctions $f(t)$, $g(t)$ sont analytiques en t, ont une infinité de déterminations, et un nombre fini de points singuliers.

Je signale un exemple simple que MM. Fatou et Montel m'ont indiqué : soit $u(t)$ l'inverse de la fonction modulaire, c'est-à-dire la fonction qui exprime, à l'aide du module t, le rapport des périodes de l'intégrale elliptique. Le coefficient de i dans le nombre $u(t)$ garde un signe constant, le signe $+$ par exemple. Posons alors

$$(44) \qquad c = f(t) = \frac{u(t) - i}{u(t) + i},$$

on a

$$|c| \leqq 1.$$

D'autre part, $u(t)$ admet les seuls points singuliers 0, 1, ∞; $u(t)$ a une infinité de déterminations, s'échangeant entre elles par circulation de t autour de ces points singuliers, représentées par des points correspondants dans le pavage du demi-plan d'ordonnées positives par des triangles d'arcs de cercle : il en résulte bien que $f(t)$ a une infinité de déterminations et les seuls points singu-

liers $0, 1, \infty$. Si je prends pour c' une fonction analogue, par exemple $f(t^2)$ ou $f(mt)$, où m est un nombre fixe, j'aurai aussi $|c'| \leqq 1$; or l'égalité $c''^2 = 1 - c^2 - c'^2$ donne

$$\gamma''^2 + \gamma''^2_1 = 1 + (\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2)$$

d'après les propriétés bien connues sur le module d'une somme; ici on aura donc

$$\gamma''^2 + \gamma''^2_1 = 3, \qquad H < 5,$$

et la surface $\overline{S}$ obtenue pour un tel choix est tout entière logée sur la calotte limitée au parallèle de rayon $p\sqrt{2}$; en prenant $0 < K < 3 - 2\sqrt{2}$ ou, plus simplement, $0 < K \leqq 0{,}16$, nous avons une infinité de surfaces algébriques S tirées de la courbe (43) qui ne pourront recouvrir $\overline{S}$ sur aucune région.

Je vais modifier légèrement l'exemple précédent : prenons l'expression

$$(45) \qquad \frac{u(t) + \frac{n}{m} i}{u(t) + i},$$

où n et m sont deux nombres positifs, $n < m$; dans le plan de la variable u, le point $u(t)$ étant toujours dans le demi-plan supérieur, le rapport de ses distances aux points $-i$ et $-\frac{n}{m} i$ est manifestement compris entre 1 et $\frac{n}{m}$; si donc je prends

$$(46) \qquad c = \frac{m\,u(t) + ni}{u(t) + i}, \qquad c' = \frac{m\,u(\lambda t) + ni}{u(\lambda t) + i},$$

où λ est une constante arbitraire, on a, par le raisonnement précédent,

$$(47) \qquad \begin{cases} n \leqq |c| \leqq m, \\ n \leqq |c'| \leqq m, \\ 2n^2 < H < 1 + 4m^2; \end{cases}$$

la surface correspondante $\overline{S}$ est tout entière comprise dans la couronne comprise entre les parallèles de rayon $p\sqrt{\frac{2n^2 - 1}{2}}$ et $pm\sqrt{2}$; choisissons maintenant deux autres nombres positifs n_1 et m_1 tels que $\sqrt{\frac{1 + 4m^2}{2}} < n_1 < m_1$.

La surface $\overline{S_1}$ obtenue par le même procédé, en remplaçant m et n par m_1 et n_1, se loge sur une couronne située tout entière au-dessus de la précédente; nous pouvons continuer et obtenir des surfaces $\overline{S}$, $\overline{S_1}$, ..., $\overline{S_j}$, ... en nombre illimité recouvrant des portions de $\mathfrak{P}$ sans aucun point commun; deux surfaces quelconques de cette suite ne peuvent se recouvrir sur aucune étendue. Les surfaces $\overline{S'}$, $\overline{S'_1}$, ..., $\overline{S'_j}$, ... correspondantes représentent toutes des portions de la région 2, définie par le paraboloïde, sans point commun; elles ne se recouvrent pas non plus. Ces diverses surfaces ont des formes compliquées; mais chaque surface $\overline{S_j}$ ou $\overline{S'_j}$ est simplement connexe sans ligne d'arrêt; d'après la discussion faite dans les pages précédentes, ce sont les plus simples qui puissent être choisies pour réaliser cette disposition.

Au paragraphe 4 nous avions obtenu une surface Σ, non de révolution, recouverte sur $p+2$ régions séparées par $p+2$ surfaces S_0, S_1, ..., S_{p+1} : dans cet exemple, p était arbitrairement grand, mais déterminé. Ici, avec le paraboloïde, il n'y a pas de limitation au nombre des surfaces. Dans ces deux exemples, le ds^2 a une forme particulièrement simple; ceci suffit pour nous convaincre de la complication de forme et de disposition respective que peuvent présenter deux surfaces représentatives même d'une seule région d'un ds^2 réduit; la disposition mutuelle de deux surfaces correspondant à deux régions distinctes est, en réalité, plus simple.

7. Je donne maintenant un exemple simple de surfaces constituées d'une nappe unique avec un bord, ligne d'arrêt.

Je considère les fonctions de t définies par deux séries de Fredholm (*voir* par exemple *Traité d'Analyse* de M. Picard, tome II, p. 74)

$$(48)\qquad \begin{cases} c = A + \sum_1^\infty a^n t^{n^2}, \\ c' = B + \sum_1^\infty b^n t^{n^2}, \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes réelles comprises entre 0 et 1, tandis que A et B sont deux constantes quelconques, réelles ou non. Si le

segment $(-1, +1)$ est tout entier extérieur au cercle de centre A et rayon $\frac{a}{1-a}$ ou au cercle de centre B et rayon $\frac{b}{1-b}$, on est certain que la courbe $\mathfrak{W}$ n'a aucun point réel; les fonctions c, c' admettent le cercle de centre O et rayon unité comme coupure et l'on a

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{|A| - \frac{a}{1-a}\right\}^2 \leqq \gamma^2 + \gamma_1^2 \leqq \left\{|A| + \frac{a}{1-a}\right\}^2, \\ &\left\{|B| - \frac{b}{1-b}\right\}^2 \leqq \gamma'^2 + \gamma_1'^2 \leqq \left\{|B| + \frac{b}{1-b}\right\}^2. \end{aligned}\right.$$

L'égalité $c''^2 = 1 - c^2 - c'^2$ entraîne d'après les théorèmes sur le module d'une somme

$$0 \leqq \gamma''^2 + \gamma_1''^2 \leqq 1 + (\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2).$$

Donc, en posant

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} l &= \left\{|A| - \frac{a}{1-a}\right\}^2 + \left\{|B| + \frac{b}{1-b}\right\}^2, \\ L &= 1 + 2\left\{|A| + \frac{a}{1-a}\right\}^2 + 2\left\{|B| + \frac{b}{1-b}\right\}^2, \end{aligned}\right.$$

on a

$$(51)\qquad l \leqq H \leqq L.$$

La surface réelle $\mathfrak{F}$, applicable sur le paraboloïde $\mathfrak{P}$, déduite de cet exemple, est une surface limitée, ayant un bord continu, correspondant aux valeurs de t de module unité et elle ne recouvre qu'une portion de zone de $\mathfrak{P}$ comprise entre les deux parallèles de rayon $p\sqrt{\frac{l-1}{2}}$ et $p\sqrt{\frac{L-1}{2}}$. Si K est pris suffisamment petit, elle ne recouvrira aucune portion de la surface algébrique S déterminée au paragraphe précédent.

Il est clair aussi que si A et B augmentent en module, on peut rendre l et L arbitrairement grands; donc on peut avec un nouveau choix A_1, B_1, a_1 et b_1 définir une nouvelle surface $\mathfrak{F}_1$ telle que $L \leqq l_1$; dans ces conditions, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ ne se recouvriront pas non plus. On pourra, par ce procédé, réaliser à la surface de $\mathfrak{P}$ une mosaïque discontinue dérivant de surfaces successives $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... obtenues par des séries de Fredholm convenables.

8. Cet exemple se prête encore à élucider le point suivant : si deux surfaces analytiques réelles de même ds^2, même prises dans leur totalité, ne peuvent se recouvrir physiquement, il n'y a aucune raison pour que *toujours* un point réel ou imaginaire de l'une ait un correspondant sur l'autre. Il peut fort bien arriver qu'il n'y ait aucune correspondance à établir entre les points réels ou imaginaires des deux surfaces. Ici, pour une surface $\mathcal{F}$, calculons la quantité H relative aux points réels ou imaginaires : autrement dit, A′ étant la conjuguée de A, B′ celle de B, posons

$$(52)\qquad \begin{cases} c_1 = A + \sum_1^\infty a^n t_1^{n^2}, \\ c'_1 = B' + \sum_1^\infty b^n t_1^{n^2}, \end{cases}$$

et faisons varier t et t_1 indépendamment l'un de l'autre dans le cercle de convergence; calculons $H = cc_1 + c' c'_1 + c'' c''_1$: si t et t_1 sont conjugués, H est réel; si t et t_1 sont quelconques, H prend des valeurs réelles ou imaginaires, limitées, donc l'affixe de H balaie une aire limitée. Pour la surface $\mathcal{F}_1$ effectuons les mêmes opérations, nous avons une quantité complexe H_1 balayant une autre aire limitée et, comme plus haut, nous verrons que l'on peut s'arranger pour que ces deux aires n'aient aucune partie commune : donc, même en utilisant la partie imaginaire de ces deux surfaces, il n'y aura sur aucune de point homologue d'un point de l'autre.

9. L'exemple des surfaces applicables sur une surface de révolution prête aussi à une remarque particulière à ces surfaces.

S et S_1 étant deux surfaces réelles correspondant à un même ds^2 de révolution, il ne suffit pas de constater qu'un point M_1 quelconque de S_1 *peut* toujours avoir un homologue réel sur l'autre surface, pour affirmer que S_1 peut être étalée tout entière sur S.

Supposons par exemple que S_1 soit le paraboloïde $x^2 + y^2 = 2pz$ et S la surface déduite de la cubique de Lyon pour $K > 1$. La surface S peut être étalée tout entière sur et recouvrir une *portion* de tous les parallèles de $\mathfrak{P}$, de sorte qu'en choisissant convenablement *une* application de S sur $\mathfrak{P}$, un point P *donné* du para-

boloïde peut être recouvert par un point de S : mais S ne recouvre pas tout le paraboloïde, de sorte qu'inversement dans *un* mode déterminé d'application du paraboloïde et de la surface S, il y a des points du paraboloïde qui, dans ce mode, n'ont pas d'homologue réel. C'est pour cela que le paraboloïde de révolution définissant par son ds^2 deux régions, au sens que j'ai spécifié plus haut, la surface S est susceptible de représenter un point quelconque de la région correspondant à S et $\mathfrak{P}$, mais elle ne la représente jamais tout entière, tandis que $\mathfrak{P}$ la représente complètement.

En cherchant à étaler $\mathfrak{P}$ sur S, quand on rencontre la ligne de rebroussement de S, des morceaux de $\mathfrak{P}$ restent sans trouver logement ; *découpons-les :* la fraction ainsi obtenue de $\mathfrak{P}$ peut de nouveau, dans un autre mode d'application de $\mathfrak{P}$ et S, être logée sur S : au bout d'un nombre limité d'opérations, toute fraction de $\mathfrak{P}$ a trouvé logement ; nous voyons cette fois qu'il a fallu des *coupures*. De même si je prends deux surfaces S et S_1 correspondant à K et K_1 ($K_1 > K > 1$) toujours déduites de la cubique de Lyon, on ne pourra appliquer l'une d'elles sur l'autre, totalement, qu'à condition de faire des coupures dans l'une. C'est pour cela que $\mathfrak{P}$ doit seul être considéré comme représentant totalement toute sa région ; même remarque pour une sphère.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES CYCLIQUES ET SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX.

1. Dans les deux Chapitres qui précèdent, nous avons obtenu, par des méthodes fort simples, des résultats importants relatifs à la configuration géométrique des diverses surfaces représentatives d'un même ds^2.

Pourtant, quand il s'agit de deux surfaces réelles représentatives de deux fractions sans point commun, prises dans la même région ou dans deux régions distinctes du ds^2 *réduit*, on peut se demander quel intérêt présente *l'ensemble* de ces deux surfaces S et S_1. Nous allons voir, qu'au moins dans certains cas particuliers, deux surfaces S et S_1 de cette espèce fournissent un système cyclique réel et le système triple orthogonal qui lui est associé. Si l'on néglige com-

plètement la distinction entre le réel et l'imaginaire, le problème de l'application des surfaces, la recherche des systèmes cycliques, le problème de la représentation sphérique ne constituent en réalité qu'un seul et même problème considéré à un triple point de vue. Je renvoie le lecteur à la *Théorie des surfaces*, de Darboux, tomes II et IV; je signale en particulier le paragraphe 939, tome IV, page 126, où Darboux donne la construction du système cyclique dérivé de deux surfaces applicables Θ et Θ_1. Introduisant ensuite la distinction entre le réel et l'imaginaire, on obtient ce résultat curieux que deux surfaces réelles, applicables point réel sur point réel, donnent un système cyclique complètement imaginaire; mais que, si un point réel $m(x_1, x_2, x_3)$ et un point imaginaire $m_1(ix_4, x_5, x_6)$ engendrent une nappe réelle de surface S et une nappe imaginaire S_1 de surfaces applicables, la correspondance ayant lieu entre le point réel m et le point imaginaire m_1, le roulement de S_1 sur S engendre un système cyclique réel; réciproquement, tout système cyclique réel s'obtient par ce procédé. Ce point est établi par Darboux, paragraphe 969, tome IV, page 162 : de la sorte, si la détermination de certains systèmes cycliques a pu être effectivement obtenue par une méthode directe, on peut espérer obtenir des exemples intéressants par la méthode indirecte consistant à réaliser certains couples de surfaces applicables. Les propriétés géométriques sont nombreuses, il s'agit de les classer.

2. On a rapporté S à un système d'axes rectangulaires $Oxyz$ réels; S_1 est rapportée à un système d'axes $O_1 x_1 y_1 z_1$ réels aussi, coïncidant ou non avec les premiers; $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sont donc six fonctions réelles de deux arguments réels u, v pour un certain champ réel (u, v) et l'on a l'identité

$$(1) \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 - dx_5^2 - dx_6^2 = 0,$$

où n'interviennent que des quantités réelles et que l'on pourrait prendre comme point de départ, sans introduire d'imaginaires : mais l'introduction des imaginaires facilite beaucoup l'obtention des éléments réels, comme dans beaucoup d'autres cas. Je considère la triple infinité de points P qui, dans le système $O_1 x_1 y_1 z_1$, ont pour coordonnées $(i\lambda, \mu, \nu)$ où λ, μ, ν sont trois constantes réelles. On fait rouler S_1 sur S de façon que m_1 vienne recouvrir m,

et que le plan tangent en m_1 s'applique sur le plan tangent en m, les directions de tangentes homologues se recouvrant : dans ce mouvement imaginaire, à deux paramètres, la construction de Darboux appliquée aux points P donne, pour chaque point P, un système cyclique réel et un système triple orthogonal réel.

Il faut remarquer que si nous nous bornons au champ réel (u, v), le point m_1 engendre une nappe imaginaire de surface; mais il n'en résulte pas nécessairement que la surface analytique complète S_1 soit imaginaire; cela peut être exact, mais dans d'autres cas la surface S_1 peut être réelle : il existe alors sur S des points réels m dont l'homologue m_1 sur S_1 est imaginaire; ce sont ces portions, négligées quand il ne s'agit que d'étudier l'application physique de S et S_1, qui se trouvent au contraire conservées à l'exclusion de toute autre quand nous cherchons des systèmes cycliques réels. C'est précisément en cela que résulte l'intérêt du travail que j'ai exposé dans les Chapitres précédents. J'y ai étudié l'application de deux surfaces réelles et ai, en particulier, insisté sur le cas où *tout* point réel de S a un homologue imaginaire sur S_1, ou bien où S se partage en deux régions $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ dont l'une $S^{(1)}$ se compose de points réels à homologue imaginaire. Une objection se présente immédiatement : il est *nécessaire* que m étant réel, m_1 soit imaginaire; cela seul ne suffit pas : il faut de plus, au moins avec un certain système d'axes réels, que les coordonnées de tous les points m_1 soient deux réelles et la troisième imaginaire pure. Or il se trouve, circonstance heureuse pour le cas actuel, que, dans la plupart des exemples que j'ai donnés, cette condition très particulière est réalisée, de sorte que nous avons déjà virtuellement obtenu un grand nombre de systèmes cycliques. Les surfaces de révolution, les surfaces du second degré, les surfaces de translation $e^x \pm e^y \pm e^z = 1$ (Chap. II, § I), les surfaces de translation engendrées par deux courbes planes situées dans deux plans rectangulaires (Chap. I, § II) donnent des exemples fort simples.

(*A suivre.*)

1ère Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HAROLD HILTON. — PLANE ALGEBRAIC CURVES. Oxford, At the Clarendon Press, 1920.

L'auteur s'est proposé de rajeunir et de mettre au point l'œuvre de SALMON, déjà vieille, que connaissaient bien les « taupins », il y a trente ans. Ce genre de questions : Géométrie algébrique, courbes algébriques, n'a plus, aujourd'hui, la même importance pour les élèves de Mathématiques spéciales. On a reconnu, sagement, que *tous* ne seront pas candidats à l'Agrégation, et l'on a orienté autrement l'enseignement. Mais il ne faut pas oublier ceux qui seront des mathématiciens, plus ou moins *spécialisés* et c'est à ceux-là que s'adresse le Livre de M. Hilton.

L'étudiant qui veut devenir un mathématicien, quel que soit l'art particulier qu'il cultivera, n'a pas le droit d'ignorer les faits primordiaux concernant les courbes algébriques. Ces faits, ces idées, il les trouve ici. Les courbes de degré 3 et 4 sont étudiées très soigneusement, avec beaucoup d'exemples, et des figures commodes. Quand on passe au degré 5, il n'y a plus de théorie élémentaire; il faut se contenter des généralités. Nous trouvons la théorie des polaires, des foyers, des nombres de Plucker, et le *genre*, ce nombre qui dépend du degré de la courbe et de ses singularités, et qui reste invariable dans une transformation quadratique.

Il y a là une mine très riche d'exemples de courbes bien intéressantes pour l'étudiant qui voudra faire des applications concrètes de la théorie générale des intégrales abéliennes. Il y a là une introduction très pratique à la théorie des fonctions algébriques.

Après avoir repris, d'une manière originale, toutes les questions classiques, l'auteur expose les résultats les plus récents sur la théorie des *circuits*. Un circuit est, ou bien une boucle fermée, ou bien l'ensemble de deux branches d'une hyperbole, par exemple. Klein, Harnack, Hilbert ont donné, sur ce sujet, des théorèmes intéressants.

Si le mode d'exposition est différent du nôtre, c'est une raison de plus pour recommander ce Livre aux étudiants; il les fera travailler utilement.

ROBERT D'ADHÉMAR.

GEORGES GIRAUD. — LEÇONS SUR LES FONCTIONS AUTOMORPHES (*Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, publiée sous la direction de M. ÉMILE BOREL). Paris, Gauthier-Villars, 1920, 126 pages.

Dans cet Ouvrage, où il résume une partie du cours qu'il a professé au Collège de France (Fondation Claude-Antoine Peccot), M. G. Giraud nous présente une sorte d'introduction à la théorie générale des fonctions automorphes de n variables.

M. Giraud prend soin de nous dire, dans son Introduction, ce qu'il ne faut pas chercher dans son livre. La théorie des fonctions fuchsiennes y est seulement esquissée, dans le dernier Chapitre, en tant que cas particulier de la théorie générale qui précède. L'application des fonctions fuchsiennes à l'uniformisation des fonctions algébriques et à l'intégration des équations différentielles linéaires n'y est point étudiée. Il n'y est pas question des fonctions kleinéennes.

Aussi bien le point de vue adopté par M. Giraud ne lui permettait-il pas d'entreprendre un exposé synthétique des travaux d'Henri Poincaré, qui prend un point de départ et qui poursuit un but différent du sien. Il est fort à souhaiter qu'un tel exposé soit fait quelque jour, tant pour bien mettre au point l'histoire des fonctions automorphes que pour vulgariser certaines idées et certaines méthodes qui peuvent encore être fécondes. Mais tel n'était pas l'objet que M. Giraud avait en vue.

M. Giraud se propose de mettre en évidence les propriétés communes à des familles très étendues de groupes automorphes qui comprennent comme cas particuliers les groupes *fuchsiens* d'Henri Poincaré, les groupes *hyperfuchsiens* (à deux variables) signalés pour la première fois par M. Picard, les groupes *hyperabéliens* (à deux variables) également découverts par M. Picard, et enfin les groupes à n variables, obtenus par généralisation des

groupes de M. Picard, qui ont été étudiés notamment par M. Fubini et par M. Giraud lui-même.

La méthode suivie par M. Giraud est au fond une application des belles méthodes de M. Picard. Mais M. Giraud précise la signification et la portée de ces méthodes en dégageant très exactement les conditions d'existence des groupes et fonctions considérés, et il en tire un procédé systématique permettant de construire celles-ci *a priori*, à partir de certaines hypothèses simples.

Envisageons *a priori* un groupe de substitutions birationnelles portant sur n variables

$$X_h = f_h(x_1, x_2, \ldots; x_n, a_1; \ldots, a_p) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

où les a sont des paramètres (liés éventuellement par certaines relations algébriques) dont les f sont fonctions rationnelles homogènes de degré 0. Appelant x'_j, x''_j la partie réelle et le coefficient de i dans x_j et considérant le point $(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n)$ comme un point de l'espace à $2n$ dimensions, M. Giraud suppose que, dans un certain domaine D de cet espace, le groupe satisfait à diverses conditions. Notamment : le domaine D est changé en lui-même par toute substitution du groupe; il existe une intégrale $2n$-uple réelle

$$\int^{(2n)} \Psi(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n)\, d(x'_1, \ldots, x''_n)$$

invariante par rapport aux substitutions du groupe (non altérée lorsqu'on l'étend d'une part à une partie δ du domaine D, d'autre part à la portion Δ de D transformée de δ par une substitution quelconque du groupe); il existe également une fonction réelle et symétrique de deux points, $F(x'_1, x''_1, \ldots, x''_n, \xi'_1, \xi''_1, \ldots, \xi''_n)$, continue quand les deux points appartiennent à D et invariante par rapport aux substitutions du groupe; on suppose, en outre, que si λ est un nombre réel compris entre certaines limites, et $(\xi'_1, \ldots, \xi''_n)$ un point fixe, la multiplicité $F(x'_1, \ldots, \xi''_n) = \lambda$ partage D en deux régions dont l'une (celle où $F < \lambda$) n'a aucun point commun avec la frontière de D et constitue l'intérieur de la multiplicité. L'*intégrale fondamentale* invariante et la fonction invariante (*invariant fondamental*) jouent dans la théorie de M. Giraud le même rôle que le S et le L (aire de Lobatschewsky

et distance de Lobatschewsky) d'Henri Poincaré. La considération de F (c'est-à-dire du paramètre λ) tient lieu de celle de l'invariant différentiel envisagé par M. Fubini (et déjà, dans le cas de deux variables, par H. Poincaré en 1884, *Œuvres* t. II, p. 63).

Partant de telles hypothèses posées *a priori*, M. Giraud détermine d'abord des conditions simples sous lesquelles le groupe sera *discontinu* (comprenant, d'ailleurs, un nombre quelconque de substitutions). Puis il démontre l'existence des fonctions Θ correspondantes et enfin celle des fonctions automorphes, uniformes dans D, s'y comportant partout comme des fonctions rationnelles, et invariantes par toutes les substitutions du groupe. Après quoi M. Giraud détermine (par une méthode générale, dite *méthode de rayonnement*) un polyèdre fondamental relatif à son groupe (analogue au polygone fondamental de H. Poincaré) et définit les cycles d'arêtes ou de sommets. Puis il établit diverses propriétés, notamment la propriété essentielle : *Si le polyèdre fondamental et sa frontière n'ont aucun point commun avec la frontière de* D (hypothèse dont on peut se dispenser dans le cas des fonctions fuchsiennes), $n+1$ *fonctions automorphes quelconques* (*invariantes par le même groupe*) *sont liées par une relation algébrique.*

Telle est, en résumé, la remarquable déduction présentée par M. Giraud. Dans les Chapitres II-V de son Livre, il applique cette déduction aux groupes binéaires hyperfuchsiens à n variables (déduits de formes quadratiques d'Hermite décomposables en n normes de formes linéaires à coefficients d'un certain signe et *une* norme à coefficients de l'autre signe), aux groupes hyperabéliens et à leurs généralisations (déduites de formes quadratiques à $n+2$ variables, décomposables en n carrés d'un même signe et deux de l'autre signe), et enfin aux fonctions fuchsiennes.

Pierre Boutroux.

MÉLANGES

APPLICABILITÉ DES SURFACES RÉELLES. ÉTUDE SPÉCIALE DE LA CORRESPONDANCE ENTRE POINT RÉEL ET POINT IMAGINAIRE. SYSTÈMES CYCLIQUES RÉELS ET SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX CORRESPONDANTS

(*suite et fin*);

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

Une autre objection se présente encore : pour le problème actuel, il n'est nullement nécessaire que la surface S_1 soit réelle; c'est presque une circonstance défavorable, puisque nous sommes obligés alors de ne tenir compte que de certaines nappes imaginaires de S_1, si S_1 est réelle.

De la sorte, la méthode que j'ai utilisée dans les deux Chapitres précédents semblerait ne donner qu'une solution particulière. Cette objection tombe, au moins partiellement, si l'on remarque que notre méthode fournit évidemment d'un seul coup, *non pas un seul*, mais bien *quatre systèmes cycliques réels*.

3. En effet, l'identité (1), à laquelle conduit tout système cyclique réel connu, contient les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 d'une façon symétrique. En conservant trois d'entre elles, ce qui peut se faire de quatre façons différentes, je définis à chaque fois un couple de deux surfaces applicables dans les conditions voulues. Si je prends des notations plus symétriques, j'appellerai Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les surfaces analytiques lieux respectifs des points

$$(2)\qquad \begin{cases} \Theta_1(ix_1, x_5, x_6), \\ \Theta_2(ix_2, x_5, x_6), \\ \Theta_3(ix_3, x_5, x_6), \\ \Theta_4(ix_4, x_5, x_6) \end{cases}$$

et Θ'_1, Θ_2, Θ_3, Θ'_4 les surfaces lieux respectifs des points

$$(3)\quad \begin{cases} \Theta_1(x_2, x_3, x_4), \\ \Theta'_2(x_1, x_3, x_4), \\ \Theta'_3(x_1, x_2, x_4), \\ \Theta'_4(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

La surface Θ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ roulant sur la surface Θ'_k de même indice, je définis une série de systèmes cycliques, comme il a été expliqué plus haut : ce sont les notations de Darboux, pour le roulement, conservées autant que possible, l'indice de Darboux étant passé au rôle d'accent. Alors on constatera aisément que si, accidentellement, une des quatre surfaces Θ_k est réelle, les autres sont généralement complètement imaginaires et ceci lève bien, en partie tout au moins, l'objection posée en dernier lieu.

Quelques remarques se présentent naturellement : la surface $\overline{\Theta}_1(-ix_4, x_5, x_6)$ substituée à Θ_1 donne exactement les mêmes systèmes cycliques ou orthogonaux. Si donc Θ_1 et $\overline{\Theta}_1$ sont analytiquement distinctes, elles sont toutes deux complètement imaginaires; si Θ_1 et $\overline{\Theta}_1$ se confondent analytiquement, elles peuvent néanmoins ne définir qu'une surface imaginaire, dont l'équation est à coefficients réels; M. Goursat a, dans divers travaux, convenu d'appeler encore *réels* ces éléments géométriques non distincts de leur élément conjugué. Enfin il peut arriver que Θ_1 et $\overline{\Theta}_1$ constituent deux nappes imaginaires conjuguées d'une même surface réelle : cette surface réelle, que je désignerai simplement par Θ_1, admet donc un plan de symétrie : il existe sur la surface Θ'_1, qui est réelle, des points réels ayant un homologue imaginaire sur Θ_1; si ces points remplissent toute l'étendue réelle de Θ'_1, je n'ai rien à ajouter pour Θ_1; mais, dans le cas contraire, Θ'_1 possède deux séries de points : les uns ont un homologue réel, les autres un homologue imaginaire; deux hypothèses se présentent encore; ou bien Θ'_1 se partage en plusieurs nappes réelles, physiquement distinctes, tous les points de certaines nappes ont un homologue imaginaire, ces nappes sont seules à conserver, tous les points de certaines autres nappes ont un homologue réel, ces nappes sont à rejeter. Ou bien, sur une même nappe de Θ'_1 (que Θ'_1 soit à une nappe unique ou à plusieurs nappes), il existe des points des deux catégories : dans

ces conditions Θ_1 est touchée par son plan de symétrie tout le long d'une certaine courbe réelle qui constitue une asymptotique singulière de Θ_1, soient C cette courbe de Θ_1 et C′ la courbe homologue, réelle aussi, sur Θ'_1 ; la courbe C′ partage Θ'_1 en deux régions dont l'une est recouverte physiquement par Θ_1 et doit être rejetée, tandis que l'autre, non recouverte physiquement, est seule à conserver. Nous retrouvons les particularités citées au Chapitre I, paragraphe 1.

4. Réciproquement, si nous connaissons une surface réelle Θ_1 ayant un plan de symétrie qui la touche le long d'une courbe C formant arête de rebroussement, nous pourrons, en général, déterminer une infinité de surfaces réelles Θ'_1 recouvertes physiquement par Θ_1 sur une seule des deux régions déterminées sur ces surfaces par la courbe C′ homologue de C : le couple Θ'_1, Θ_1 satisfera aux conditions voulues. Il suffira d'appliquer la méthode du ds^2 *réduit*, exposée au Chapitre I, à la surface Θ_1. Si la courbe C a pour image une courbe γ qui ne soit pas frontière d'une région du ds^2 réduit, nous avons montré au paragraphe 7 du Chapitre I, comment on choisira la courbe C′ de façon que la surface Θ'_1 résultant de C′ soit réelle : il suffit, qu'en chaque point de C′, le rayon de courbure de C′ soit inférieur au rayon de courbure de la courbe plane C. Par la construction ainsi réalisée, la surface Θ_1 et la surface Θ'_1 sont des surfaces représentatives d'une même région du ds^2 réduit.

Si la surface Θ_1, réelle [1] et à plan de symétrie, n'admet pas de ligne de rebroussement dans le plan de symétrie, il faudra d'abord appliquer la méthode du ds^2 réduit et voir si ce ds^2 définit ou non plusieurs régions. Si l'on ne trouve qu'une région, il n'existe pas de surface Θ'_1 (il est bien entendu que c'est la surface Θ'_1 qui est la surface fixe et Θ_1 la surface roulante). S'il existe plusieurs régions, il faudra examiner si, pour les régions non correspondantes à Θ_1, les coordonnées des points (nécessairement imaginaires de Θ_1) sont deux réelles, et une imaginaire pure. Si la réponse est affirmative, on sait déterminer les surfaces Θ'_1 : ce sont les surfaces représentatives de ces régions. Sinon, il n'existe pas de surfaces Θ'_1.

---

[1] Réelle, soit au sens vulgaire, soit au sens de M. Goursat.

On remarquera que ceci s'applique même si Θ_1 avait une arête de rebroussement dans son plan de symétrie, car rien n'empêche de trouver des surfaces Θ'_1 de diverses catégories.

Si la surface Θ_1 donnée, lieu du point (ix_1, x_5, x_6), est complètement imaginaire, son ds^2, à savoir $dx_5^2 + dx_6^2 - dx_1^2$, est une expression réelle, de sorte que la méthode du ds^2 réduit permettra encore de décider s'il existe ou non des surfaces réelles Θ'_1.

Si donc la surface *roulante est donnée*, réelle ou imaginaire, de simples différentiations et éliminations suffisent pour décider *s'il existe ou non* des surfaces *fixes* associées à cette surface roulante en vue de systèmes cycliques réels. La détermination effective des surfaces fixes, dans le cas où l'on a reconnu qu'il en existe, est cette fois le problème général : construire les surfaces réelles représentatives d'une région de ds^2 réduit.

5. Le problème réciproque pourra être posé autrement : *on pourra donner la surface fixe et chercher la surface roulante;* il s'agit cette fois de mettre un ds^2 positif donné sous la forme $dX^2 + dY^2 - dZ^2$ où X, Y, Z sont des fonctions inconnues réelles. C'est un problème distinct de celui qui a été étudié dans les Chapitres qui précèdent, surtout si la surface inconnue Θ_1 est totalement imaginaire; si la surface inconnue Θ_1 doit être réelle et appartenir à une région distincte de celle que représente la surface donnée Θ_1, l'étude précédente ne nous donne non plus aucun criterium pour décider *a priori* si une circulation réelle sur Θ'_1 donne sur la surface inconnue Θ_1 des points à coordonnées réelles ou imaginaires pures. Il n'y a qu'un cas où l'étude précédente nous donne une indication d'ailleurs minime, c'est le cas où la surface Θ_1 inconnue appartiendra à la même région que Θ'_1 et la recouvrira partiellement : nous nous donnerons sur Θ'_1 la frontière des portions recouvertes et non recouvertes : la courbe C′ doit se transformer en une courbe plane C que l'on obtiendra par trois quadratures, car le rayon de courbure de C est égal au rayon de courbure géodésique de C′. Nous retombons sur un problème posé au paragraphe 3 du Chapitre I : peut-on choisir la courbe C′ arbitrairement ? Il peut se faire, dans un autre cas, que Θ_1 appartienne à la même région que Θ'_1 et ne la recouvre pas du tout : cela exige que Θ'_1 ne représente qu'une fraction de la région qui lui correspond et, par

suite, que Θ'_1 ait une ligne d'arrêt ou une ligne de rebroussement asymptotique singulière. Mais je ne peux donner de détail plus précis.

6. Il s'agit maintenant de montrer que la connaissance *effective* de la surface réelle Θ'_1 et de la surface Θ_1 (réelle ou totalement imaginaire, peu importe) permet en général d'avoir un système cyclique dépendant des trois arbitraires λ, μ, ν introduites plus haut (§ 2), et cela uniquement par des différentiations et éliminations.

Si le ds^2 commun de Θ'_1 et Θ_1 n'est ni de révolution, ni à courbure constante, la donnée de Θ'_1 et Θ_1 permet de trouver par les opérations indiquées les formules de correspondance entre les coordonnées d'un point M de Θ_1 et du point correspondant M′ de Θ'_1; la construction de Darboux donne alors chaque cercle Γ du système cyclique, individuellement, par des opérations analytiques du type indiqué. Mais si le ds^2 est de révolution ou à courbure constante, la donnée de Θ'_1 et Θ_1 n'est pas suffisante; il est nécessaire, pour réaliser l'application effective, soit d'effectuer diverses quadratures, soit d'intégrer deux équations de Riccati : nous supposerons donc ces opérations faites au préalable, de sorte que nous connaissons de toutes façons le couple Θ_1, Θ'_1 et la correspondance ponctuelle réalisée par l'application : dans ces conditions, la proposition énoncée est vraie sans réserves. Nous connaissons aussi Θ_2 et Θ'_2, Θ_3, et Θ'_3, Θ_4 et Θ'_4 dans les mêmes conditions précises. Les quatre systèmes cycliques sont connus d'un seul bloc [1].

Quelles sont les opérations nécessaires ensuite pour avoir le système triple orthogonal correspondant au couple Θ_1, Θ'_1 ?

La première famille de surfaces de ce système est constituée par les trajectoires orthogonales des cercles Γ : la sphère point P $(i\lambda, \mu, \nu)$ invariablement liée à Θ_1 a donné, par son intersection avec les plans tangents communs, les divers cercles Γ, et une génératrice isotrope déterminée de cette sphère marque sur chacun de ces cercles un point Q dont le lieu est une surface Σ de la première famille; Σ est une trajectoire orthogonale des cercles Γ. Sur un

---

[1] Si Θ_1 et Θ'_1 ont un ds^2 de révolution, chaque *mode particulier* de correspondance entre Θ_1 et Θ'_1 donnera quatre systèmes cycliques.

cercle Γ réel envisageons tous les points Q réels, chacun détermine une génératrice isotrope PQ et ces génératrices PQ donneront toutes les surfaces Σ réelles. Soit Σ l'une d'elles, déterminons-en les lignes de courbure des deux séries C′ et C″ : ceci exige l'intégration de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre; alors, en associant dans la famille à deux paramètres de cercles Γ, tous ceux, nécessairement réels, qui rencontrent une ligne de courbure réelle du système C′, on a la seconde famille de surfaces Σ′; le système C″ fournit de même la troisième famille Σ″. On a ainsi les trois familles réelles Σ, Σ′, Σ″, la première sans opération complémentaire, les deux dernières par l'intégration de deux équations différentielles du premier ordre. Or, comme Σ′, Σ″ correspondent au système conjugué commun à Θ_1 et Θ'_1, on voit que la détermination de ce système conjugué ou des lignes de courbure d'une surface quelconque Σ est le même problème; de plus, ce système conjugué est réel sur Θ'_1, car si M′ décrit une ligne de ce système, le cercle Γ décrit une surface Σ′ ou Σ″. Supposons donc déterminé ce système : alors nous allons voir que nous avons obtenu, du même coup, le système conjugué commun à Θ_2 et Θ'_2, ou à Θ_3 et Θ'_3, ou à Θ_4 et Θ'_4.

En effet, soient u, v les paramètres *réels* de ce système conjugué commun à Θ_1 et Θ'_1 : les fonctions (x_2, x_3, x_4) et (x_1, x_5, x_6), puisque le facteur constant i de ix_1 ne jouera aucun rôle ici, sont six solutions d'une même équation aux dérivées partielles

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + A(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial u} + B(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

D'après la remarque de M. Kœnigs, nous connaissons même la septième solution

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2.$$

Il est alors évident que Θ_2 et Θ'_2, ou Θ_3 et Θ'_3, ou encore Θ_4 et Θ'_4 sont en même temps rapportées à leur système conjugué : donc les opérations qui ont permis, connaissant les quatre systèmes cycliques associés, d'obtenir le système triple dérivé de l'un d'eux, livrent en même temps les trois autres systèmes triples.

Nous avons des surfaces sur lesquelles des systèmes conjugués se conservent, d'autres sur lesquelles les lignes de courbure se con-

servent; les propriétés géométriques sont nombreuses, mais je ne les développerai pas davantage.

7. Je vais donner un exemple particulièrement intéressant où les systèmes cycliques et même les systèmes orthogonaux sont algébriques, en me servant de la développée Σ d'une surface minima d'Enneper et la faisant rouler sur elle-même.

Considérons la surface minima d'Enneper (E)

$$(5)\qquad \begin{cases} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = 3\beta + 3\alpha^2\beta - \beta^3, \\ z = 3\alpha^2 - 3\beta^2. \end{cases}$$

rapportée à ses lignes de courbure, nous prendrons pour cosinus directeurs de la normale

$$(6)\qquad \frac{-2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2},\quad \frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2},\quad \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2},$$

le rayon principal relatif aux lignes $\alpha = \text{const.}$ est $\frac{-3}{2}(1+\alpha^2+\beta^2)^2$; ces expressions montrent que la développée se compose de deux surfaces distinctes, qui sont d'ailleurs égales entre elles; je prends celle qui correspond à $\alpha = \text{const.}$ et nous avons ainsi

$$(7)\qquad \begin{cases} X = 6\alpha + 6\alpha\beta^2 + 2\alpha^3, \\ Y = -4\beta^3, \\ Z = \frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)^2 + 3\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{3}{2}. \end{cases}$$

On calcule aisément le ds^2 de cette surface Σ

$$(8)\qquad ds^2 = 36(1+\alpha^2+\beta^2)^2\,[d\alpha^2 + (\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta)^2];$$

les asymptotiques de la surface Σ ont pour équation

$$(9)\qquad d\alpha^2 + d\beta^2 = 0.$$

Plusieurs conséquences importantes en résultent; je les obtiendrai par voie purement géométrique. La développée admet une infinité d'auto-applications algébriques, définies par les formules suivantes où C est une constante :

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_1 + C, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2. \end{cases}$$

Si l'on se donne pour α_1, β_1 des valeurs réelles, on a

$$(11) \qquad \alpha = \alpha_1 + C, \qquad \beta^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 - (\alpha_1 + C)^2 = \beta_1^2 - 2C\alpha_1 - C^2;$$

le point α, β n'est réel que si $\beta_1^2 - 2C\alpha_1 - C^2 > 0$; cette inégalité définit la région extérieure à une certaine parabole dans le plan (α_1, β_1); cette parabole, d'après la forme d'équation

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = (\alpha_1 + C)^2,$$

admet l'origine pour foyer: si le point α_1, β_1 vient sur la frontière, on a $\beta = 0$, c'est la ligne de rebroussement de Σ située dans le plan XOZ; quand le point réel (α_1, β_1) pris sur la développée, que j'appellerai Σ_1 pour spécifier qu'il s'agit d'un point dénommé (α_1, β_1) avec l'indice, est situé dans la région correspondant à l'inégalité $\beta_1^2 - 2C\alpha_1 - C^2 < 0$, le point (α, β) est imaginaire : α est réel, β imaginaire pure, de sorte que X et Z sont réelles et Y imaginaire pure. On pourra donc appliquer la théorie précédente en prenant

$$(12) \quad x_1 = -iY, \quad x_2 = X_1, \quad x_3 = Y_1, \quad x_4 = Z_1, \quad x_5 = X, \quad x_6 = Z.$$

Nous utilisons un roulement de la surface mobile Σ sur la surface fixe Σ_1 et nous ne considérons qu'une nappe imaginaire de Σ. Pour étudier ce mouvement, il sera très avantageux de conserver comme paramètres β et β_1; on a alors

$$(13) \qquad \alpha_1 = \frac{\beta_1^2 - \beta^2 - C^2}{2C}, \qquad \alpha = \frac{\beta_1^2 - \beta^2 + C^2}{2C},$$

et nous utilisons le champ : β_1 réel, β imaginaire pure, de façon à n'avoir plus aucune équation d'inégalité entre les paramètres indépendants conservés.

Nous avons à déterminer le réseau conjugué commun à Σ et Σ_1 : pour qu'un réseau tracé sur Σ, soit conjugué, puisque les asymptotiques ont pour équation $d\alpha^2 + d\beta^2 = 0$, il faut et suffit que le réseau ait pour image dans le plan $\omega\alpha\beta$, rapporté à deux axes rectangulaires $\omega\alpha$ et $\omega\beta$, un réseau orthogonal. De même, pour avoir un réseau conjugué sur Σ_1, il faudra avoir pour image dans le plan $\omega_1\alpha_1\beta_1$ un réseau orthogonal; si nous supposons $\omega_1\alpha_1$ coïncidant avec $\omega\alpha$ et $\omega_1\beta_1$ avec $\omega\beta$, les formules (10) donnent la correspondance, dans le plan unique $\omega\alpha\beta$, entre les images de deux points correspondants de Σ et Σ_1; on voit immédiatement que le

faisceau de paraboles homofocales $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - C_1)^2$ où C_1 est une constante arbitraire se transforme dans le faisceau

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = (\alpha_1 + C - C_1)^2,$$

qui est le même dans son ensemble : nous avons donc un réseau orthogonal du plan image qui reste orthogonal; c'est donc un réseau conjugué tracé sur Σ, qui jouit de la particularité de rester conjugué dans la déformation continue obtenue en faisant varier C. Comme ce réseau est algébrique, il en résulte que les quatre systèmes cycliques et même les quatre systèmes orthogonaux sont algébriques. Remarquons que Σ étant applicable sur une surface de révolution, il eût pu se faire que les auto-applications de Σ ne se traduisissent pas par des équations algébriques; il y a donc ici une double circonstance heureuse, l'algébricité des systèmes cycliques, puis celle des systèmes orthogonaux.

Bien que ce ne soit pas strictement indispensable pour la suite, j'indiquerai le moyen d'obtenir géométriquement les lignes de courbure de Σ. Les lignes de longueur nulle de Σ ont évidemment pour équation finie $\alpha^2 + \beta^2 \pm 2i\alpha = \text{const.}$; elles sont, dans le plan $\omega\alpha\beta$, représentées par les cercles de centre $(i, 0)$ ou $(-i, 0)$. Il suffit donc de trouver dans le plan $\omega\alpha\beta$ un réseau orthogonal dont les tangentes soient conjuguées par rapport aux tangentes à ces cercles; les tangentes du réseau sont donc les bissectrices des tangentes aux cercles, et par suite aussi les bissectrices des rayons. On trouve donc les coniques homofocales ayant deux foyers $(i, 0)$ et $(-i, 0)$ imaginaires sur $\omega\alpha$ et deux foyers $(0, 1)$ et $(0, -1)$ réels sur $\omega\beta$.

Quand C est donné, on connaît l'auto-application particulière de Σ; le système conjugué commun à Σ et Σ_1 est fourni par l'équation $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - C_1)^2$; dans quel intervalle faut-il faire varier C_1 pour avoir les surfaces réelles formant les deux familles qui complètent le système cyclique ? On a, je le rappelle, supposé β_1 réel, β imaginaire pure, ce qui revient à écrire

$$(13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = i\beta', \\ \alpha_1 = \dfrac{\beta_1^2 + \beta'^2 - C^2}{2C}, \qquad \alpha = \dfrac{\beta_1^2 + \beta'^2 + C^2}{2C}. \end{array} \right.$$

En prenant β et β' réels on a un cercle réel du système cyclique dans le plan tangent à Σ au point (α_1, β_1) où α_1 est donné par les

équations (13'). Il faut associer les cercles en supposant

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - C_1)^2 \qquad \text{ou} \qquad \beta^2 + 2C_1\alpha - C_1^2 = 0,$$

ce qui devient, en se servant de (13'),

$$(14) \qquad \frac{\beta'^2}{C_1} + \frac{\beta_1^2}{C_1 - C} - 1 = 0.$$

Il faut et suffit que l'équation (14) représente un lieu réel : C étant donné, on obtient dans un plan $\Omega\beta'\beta_1$ un ensemble de coniques homofocales si C_1 varie.

Supposons d'abord C positif; il faudra manifestement que C_1 soit positif; pour $0 < C_1 < C$, le lieu (14) est une hyperbole; pour $C_1 > C$, il est une ellipse. Si nous supposons que C est négatif, il faudra que $C_1 - C$ soit positif; si l'on a $C < C_1 < 0$, le lieu est une hyperbole; si $0 < C_1$, le lieu est une ellipse.

Cette discussion peut se faire aussi avec les paramètres α_1, β_1. On peut remarquer qu'en faisant varier C_1 on obtient sur Σ ou Σ_1 toutes les courbes qui correspondent successivement à l'arête de rebroussement de la surface au cours de sa déformation. Si l'on étudie Σ_1, le point image (α_1, β_1) doit rester dans la région intérieure à la parabole $\beta_1^2 - 2C\alpha_1 - C^2 = 0$; pour associer les cercles du système cyclique en surfaces enveloppes de sphère, il faut que le point α_1, β_1 décrive ou bien l'une des paraboles homofocales à la proposée complètement intérieures à celle-ci ou simplement le morceau intérieur à celle-ci d'une parabole homofocale qui lui est sécante.

Il faut maintenant indiquer le centre de chaque cercle réel du système et son rayon. Je considère le point M (α, β) de Σ, la tangente MT à la courbe $\alpha =$ const. qui y passe, la tangente MT_1 rectangulaire à MT dans le plan tangent et la normale MN à la surface. Ces droites, quand M vient sur M_1, s'appliquent respectivement sur les droites de même définition relatives à M_1.

Je donne les cosinus directeurs de ces droites :

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} MT & \dfrac{-2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{1-\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2-\beta^2}; \\[2ex] MT_1 & \dfrac{1+\beta^2-\alpha^2}{1+\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}; \\[2ex] MN & \dfrac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{1+\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}, & \dfrac{-2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}; \end{array} \right.$$

les demi-droites ainsi définies s'appliquent sur celles dont les cosinus s'obtiennent en remplaçant α par α_1, β par β_1, car si C devient nul l'auto-application (Σ, Σ_1) doit se réduire à l'application identique (Σ, Σ). Cela posé, je considère le point fixe P $(\lambda, i\mu, \nu)$ dont dérive le système cyclique; P se projette en C sur le plan tangent MTT_1 et le point C a pour coordonnées dans le plan MTT_1

$$(16)\quad \begin{cases} L = (\lambda - X)\dfrac{-2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2} + (i\mu - Y)\dfrac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2} + (\nu - Z)\dfrac{1-\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}, \\ M = (\lambda - X)\dfrac{1+\beta^2-\alpha^2}{1+\alpha^2+\beta^2} + (i\mu - Y)\dfrac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2+\beta^2} + (\nu - Z)\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}; \end{cases}$$

je rappelle que X, Y, Z sont donnés par les formules (7); α est réel, β imaginaire pure; d'ailleurs, α et β sont donnés par les formules (13'); on voit que L et M sont réelles. Le point C_1 a donc pour coordonnées

$$(17)\quad \begin{cases} X_1 + L\dfrac{-2\alpha_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2} + M\dfrac{1+\beta_1^2-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2}, \\ Y_1 + L\dfrac{2\beta_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2} + M\dfrac{2\alpha_1\beta_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2}, \\ Z_1 + L\dfrac{1-\alpha_1^2-\beta_1^2}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2} + M\dfrac{2\alpha_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2}. \end{cases}$$

Le rayon du cercle de centre C_1 est i N, N étant la coordonnée de C relative à MN, donc

$$(18)\quad R = i(\lambda - X)\frac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2+\beta^2} + i(i\mu - Y)\frac{1+\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2} + i(\nu - Z)\frac{-2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2},$$

R est réel: le cercle est tracé dans le plan tangent. Nous avons donc chaque cercle en fonction des deux paramètres β' et β_1 conservés; si β_1 et β' sont liées par la formule (14), on obtient les deux séries d'enveloppes de sphères qui forment deux familles du système triple. Il ne reste plus qu'à trouver les surfaces trajectoires orthogonales des cercles; pour cela je considère, m étant une constante numérique, le point

$$\left[\lambda + \left(m - \frac{1}{m}\right)\rho,\ i\mu + i\left(m + \frac{1}{m}\right)\rho,\ \nu + 2\rho\right];$$

ce point, si ρ varie, décrit une génératrice du cône isotrope de

sommet P. Nous exprimons que ce point est dans le plan tangent en M et l'on obtient

$$(19)\qquad \rho = -\frac{(\lambda - X)\,2\alpha\beta + (1+\alpha^2-\beta^2)(i\mu - Y) - 2\beta(\nu - Z)}{\left(m - \frac{1}{m}\right)2\alpha\beta + (1+\alpha^2-\beta^2)\,i\left(m + \frac{1}{m}\right) - i\beta}.$$

Les coordonnées de ce point dans le plan tangent MTT_1 s'obtiennent comme plus haut : soient U, V ces coordonnées, on a

$$(20)\quad \begin{cases} U = L + \left[\left(m - \frac{1}{m}\right)\frac{-2\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2} + i\left(m + \frac{1}{m}\right)\frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2} + 2\,\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}\right]\rho, \\ V = M + \left[\left(m - \frac{1}{m}\right)\frac{1+\beta^2-\alpha^2}{1+\alpha^2+\beta^2} + i\left(m + \frac{1}{m}\right)\frac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2+\beta^2} + \frac{i\alpha}{1+\alpha^2+\beta^2}\right]\rho; \end{cases}$$

elles sont réelles en prenant m réel, car alors ρ est réel.

On aura ensuite pour coordonnées du point correspondant du cercle du système cyclique

$$(21)\quad \begin{cases} X_1 + U\,\frac{-2\alpha_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2} + V\,\frac{1+\beta_1^2-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2}, \\ Y_1 + U\,\frac{2\beta_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2} + V\,\frac{2\alpha_1\beta_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2}, \\ Z_1 + U\,\frac{1-\alpha_1^2-\beta_1^2}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2} + V\,\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1^2+\beta_1^2}; \end{cases}$$

dans les formules (21), en laissant m constant et faisant varier β' et β_1, on a une surface trajectoire orthogonale des cercles : ces surfaces sont elles-mêmes unicursales, et ont des lignes de courbure algébriques. Tout est connu et a été calculé explicitement au moyen de deux paramètres réels β' et β_1.

Si l'on forme les trois systèmes cycliques associés à celui que je viens de former, on reconnaît sans peine que la surface roulante Θ_3 est une surface unicursale réelle; les surfaces roulantes Θ_2 et Θ_4 sont unicursales et totalement imaginaires.

On pourrait remarquer que Σ et Σ_1 jouent le même rôle, puisque ce sont les deux façons de désigner la développée de la surface d'Enneper; mais les permuter revient simplement à changer de signe la constante C; nos systèmes cycliques ou orthogonaux contiennent non seulement les quantités arbitraires λ, μ, ν, mais encore la constante arbitraire C.

8. J'ai étudié aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1920) un autre exemple intéressant au point de vue de ce Chapitre. Il s'agit de deux surfaces de translation applicables l'une sur l'autre avec conservation du réseau de translation. Je rappelle le résultat : soient x, y, z trois fonctions de t satisfaisant aux deux relations

$$(22)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2 = 1, \end{cases}$$

où l, m, n sont trois nombres quelconques, réels ou imaginaires.

On considère trois fonctions x_1, y_1, z_1 de t_1 satisfaisant aux équations

$$(23)\qquad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \\ \dfrac{x_1^2}{l^2} + \dfrac{y_1^2}{m^2} + \dfrac{z_1^2}{n^2} = 1. \end{cases}$$

Il est clair que les formules

$$(24)\qquad \begin{cases} X = \displaystyle\int x(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \varepsilon \int x_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ Y = \displaystyle\int y(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \varepsilon' \int y_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ Z = \displaystyle\int z(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \varepsilon'' \int z_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1; \end{cases}$$

$$(25)\qquad \begin{cases} X_1 = l \displaystyle\int x(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{l} \int x_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ Y_1 = m \displaystyle\int y(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \frac{\varepsilon'}{m} \int y_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ Z_1 = n \displaystyle\int z(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \frac{\varepsilon''}{n} \int z_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \end{cases}$$

où ε, ε', ε'' désignent $+1$ ou -1 et $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{F}_1(t_1)$ deux fonctions quelconques, définissent deux surfaces de translation S, S_1 ayant pour ds^2 commun

$$(26)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & \mathcal{F}^2(t)\,dt^2 + \mathcal{F}_1^2(t_1)\,dt_1^2 \\ & + 2[\varepsilon\, x(t)\,x_1(t_1) + \varepsilon' y y_1 + \varepsilon'' z z_1]\,\mathcal{F}(t)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt\,dt_1. \end{aligned}$$

Les deux courbes sphériques (22) et (23) sont deux coniques sphériques homofocales; le point x, y, z décrivant la première, le point lx, my, mz décrit la seconde. Si l, m, n sont réels tous trois et si l'unité est comprise entre la plus grande et la plus petite quantité l^2, m^2, n^2, j'ai deux coniques homofocales non sécantes et deux surfaces S et S_1, réelles toutes deux, se recouvrant réellement sur toute

leur étendue : à notre point de vue, nous n'avons rien de réel pour les systèmes cycliques.

Mais si m est une imaginaire pure, en supposant $n^2 > 1 > l^2$, on a pour les courbes (22) et (23) deux coniques réelles homofocales sécantes; on peut choisir les paramètres t et t_1 réels pour les points réels des deux coniques; $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ étant des fonctions réelles, la première surface S sera réelle et la surface S_1, engendrée par les points correspondant aux points réels de S, est une nappe imaginaire sur laquelle X_1 et Z_1 sont réelles et Y_1 imaginaire pure. Le roulement de S_1 sur S donne donc un système cyclique réel et un système triple orthogonal réel complètement connus quand les quadratures sont faites, puisque le système conjugué commun lui-même est connu. Avec les combinaisons de signe possibles sur les ε, on a huit surfaces d'un coup, donc trente-deux systèmes cycliques ou triples orthogonaux.

J'ai indiqué, dans le Mémoire des *Nouvelles Annales*, comment on peut faire disparaître les quadratures qui figurent dans les formules (24) ou (25) et comment on peut obtenir une infinité de surfaces algébriques en particulier. Ces surfaces algébriques fournissent donc trente-deux systèmes cycliques ou triples orthogonaux réels et algébriques.

Je vais indiquer précisément un cas où S et S_1 sont toutes deux réelles et où l'on pourra faire rouler indifféremment l'une ou l'autre sur la surface associée, de façon à avoir cette fois soixante-quatre systèmes tous algébriques et réels.

Je reprends les notations qui précèdent et remplace m par im'; je suppose $n > 1 > l > 0$. Des équations

$$(27)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ l^2 x^2 - m'^2 y^2 + n^2 z^2 = 1, \end{cases}$$

je déduis

$$(28)\qquad \begin{cases} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \\ l^2 x\,dx - m'^2 y\,dy + n^2 z\,dz = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$(29)\qquad \frac{x\,dx}{n^2 - m'^2} = \frac{y\,dy}{l^2 - n^2} = \frac{z\,dz}{-m'^2 - l^2},$$

je définis la fonction $\mathcal{F}(t)$ par

$$(30)\qquad \mathcal{F}(t)\,dt = \frac{x\,dx}{n^2 + m'^2}\,\mathrm{P}(x^2),$$

où P est un polynome entier; comme on a

$$(31)\qquad x^2 = \frac{m'^2+1}{m'^2+l^2} - \frac{z^2(m'^2+n^2)}{m'^2+l^2} = \frac{1}{n^2-l^2} - \frac{y^2(m'^2+n^2)}{n^2-l^2},$$

$P(x^2)$ se transforme à volonté en $Q(y^2)$ ou $R(z^2)$, où Q et R désignent des polynomes. On a donc

$$\int x(t)\mathcal{F}(t)\,dt = \frac{1}{n^2+m'^2}\int x^2\,P(x^2)\,dx.$$

En intégrant on obtient, en négligeant, ce qui est permis, une constante d'intégration,

$$\int x(t)\mathcal{F}(t)\,dt = x^3\,A(x^2),$$

où A est un polynome entier. Comme les fonctions x_1, y_1, z_1 sont solutions de

$$(32)\qquad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \\ \dfrac{x_1^2}{l^2} - \dfrac{y_1^2}{m'^2} + \dfrac{z_1^2}{n^2} = 1, \end{cases}$$

qui dérivent de (27) par les échanges

$$\begin{matrix} x & y & z & l & n & m' \\ z_1 & y_1 & x_1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{l} & \frac{1}{m} \end{matrix}$$

on pourra poser

$$(33)\qquad \begin{cases} \mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1 = \dfrac{x_1\,dx_1}{l^2(n^2+m'^2)}\,P_1(x_1^2), \\ \dfrac{x_1\,dx_1}{l^2(n^2+m'^2)} = \dfrac{y_1\,dy_1}{m'^2(n^2-l^2)} = \dfrac{-z_1\,dz_1}{n^2(m'^2+l^2)}, \end{cases}$$

où P_1 est un polynome. On en conclut

$$(34)\qquad \begin{cases} X = x^3\,A(x^2) + \varepsilon\,x_1^3\,A_1(x_1^2), \\ Y = y^3\,B(y^2) + \varepsilon'\,y_1^3\,B_1(y_1^2), \\ Z = z^3\,C(z^2) + \varepsilon''\,z_1^3\,C_1(z_1^2); \end{cases}$$

$$(35)\qquad \begin{cases} X_1 = l\,x^3\,A(x^2) + \dfrac{\varepsilon}{l}\,x_1^3\,A_1(x_1^2), \\ Y_1 = im'\,y^3\,B(y^2) + \dfrac{\varepsilon'}{im'}\,y_1^3\,B_1(y_1^2), \\ Z_1 = n\,z^3\,C(z^3) + \dfrac{\varepsilon''}{n}\,z_1^3\,C_1(z_1^2), \end{cases}$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 signifient certains polynomes.

Nous avons déjà écrit

$$x^2(m'^2+l^2)+z^2(m'^2+n^2)=m'^2+1,$$

ce qui prouve que la projection sur le plan xOz de la conique sphérique (x, y, z) est une ellipse en partie intérieure, en partie extérieure au grand cercle $x^2+z^2=1$ de la sphère dans le plan xoz. La projection sur le même plan xOz de la conique sphérique (x_1, y_1, z_1) possède les mêmes propriétés. Donc en prenant le point (x, o, z) ou (x_1, o, z_1) sur le morceau intérieur d'ellipse, y ou y_1 est réelle, de sorte que par (34), on obtient une nappe réelle S, et une nappe imaginaire S_1 par (35); nous faisons rouler S_1 sur S, nous avons d'un seul coup trente-deux systèmes cycliques ou triples orthogonaux tous réels et algébriques. En prenant, au contraire, (x, o, z) ou (x_1, o, z_1) sur le morceau extérieur, les quantités y ou y_1 sont imaginaires pures de sorte que l'on trouve une nappe S imaginaire, une nappe S_1 réelle. On fera rouler S cette fois sur S_1; nous avons trente-deux systèmes nouveaux.

Les deux surfaces S et S_1, cette fois toutes deux réelles, ont donc conduit à soixante-quatre systèmes cycliques.

L'exemple le plus simple correspond à $P=Q=R=3$ et $P_1=Q_1=R_1=3h$, où h est une constante. On a alors

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} (n^2+m'^2)X &= x^3+\frac{\varepsilon h}{l^2}x_1^3,\\ (l^2-n^2)Y &= y^3-\frac{\varepsilon' h}{m'^2}y_1^3,\\ -(m'^2+l^2)Z &= z^3+\frac{\varepsilon'' h}{n^3}z_1^3;\end{aligned}\right.$$

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} (n^2+m'^2)X &= l\,x^3+\frac{\varepsilon h}{l^2}x_1^3,\\ (l^2-n^2)Y &= im'y^3+\frac{\varepsilon' h}{m'^2}y_1^3,\\ -(m'^2+l^2)Z &= n\,z^3+\frac{\varepsilon'' h}{n^2}z_1^3.\end{aligned}\right.$$

Dans ces systèmes du type (34), (35), tout s'exprime finalement par les fonctions elliptiques.

Dans mon Mémoire des *Nouvelles Annales*, j'ai donné des exemples explicites de cas où les coniques homofocales qui entrent

en jeu se réduisent à un système de deux grands cercles ou au système constitué par un grand cercle et une véritable conique sphérique : j'ai montré que, dans ce cas, on peut obtenir un recouvrement partiel conduisant, d'après ce nouveau travail, à des systèmes cycliques réels. J'ai même montré dans le présent travail un cas où le recouvrement physique n'a pas lieu du tout : Chapitre I, paragraphe II.

9. Le paraboloïde de révolution $\mathfrak{P}$ fournit des résultants curieux : on doit faire rouler $\mathfrak{P}$ sur la surface réelle S′ (*voir* Chap. II, § 9). Si l'on prend le système cyclique dérivé du foyer du paraboloïde, on trouve que le centre du cercle relatif à un point de S′ est le point

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{ip}{4}\int c''\,dc' - c'\,dc'' - \frac{ip}{4}\int c''_1\,dc'_1 - c'_1\,dc''_1,\\ y &= \frac{ip}{4}\int c\,dc'' - c''\,dc - \frac{ip}{4}\int c_1\,dc''_1 - c''_1\,dc_1,\\ z &= \frac{ip}{4}\int c'\,dc - c\,dc' - \frac{ip}{4}\int c'_1\,dc_1 - c_1\,dc'_1; \end{aligned}\right.$$

le rayon de ce cercle est $\frac{p}{2}\sqrt{\frac{H-1}{2}}$, le plan de ce cercle est tangent à la surface S′ et a donc pour paramètres directeurs $i(c_1 - c)$, $i(c'_1 - c')$, $i(c''_1 - c'')$. Ici les cercles du système cyclique sont connus, quand la surface S′ est connue, par de simples différentiations et éliminations, sans avoir besoin de calculer les quadratures réalisant l'application de $\mathfrak{P}$ sur S′. Mais la détermination des surfaces des trois familles du système triple exige cette quadrature. Dans le cas de la cubique de Lyon, les surfaces enveloppes de sphères sont algébriques, mais les surfaces trajectoires orthogonales des cercles sont transcendantes.

UNE LETTRE INÉDITE DE ROBERVAL DU 6 JANVIER 1637 CONTENANT LE PREMIER ÉNONCÉ DE LA CYCLOÏDE:

PAR M. L. DE WAARD.

Peu de lignes courbes ont intéressé, dès leur invention, les mathématiciens autant que la cycloïde. Cet intérêt s'explique par le fait qu'il s'agissait d'une courbe transcendante, à laquelle on pouvait appliquer les méthodes qu'on avait appliquées jusqu'alors exclusivement aux courbes algébriques. Bientôt aussi la nouvelle courbe montra des propriétés nombreuses, importantes, et néanmoins souvent très simples. D'ailleurs elle donna lieu, à plus d'une reprise, à de graves démêlés entre des géomètres renommés. Ces faits peuvent justifier la digression sur l'origine et l'enfance de la courbe qu'on rencontre dans le premier manuel venu sur l'histoire des mathématiques.

Généralement, on attribue à présent à Roberval la découverte d'une des principales propriétés de la courbe, sa quadrature; mais on ne s'accorde point quant à la date de cette découverte, ni quant à celle de la première construction de la tangente. On croyait pouvoir déduire ces dates de certains documents postérieurs, dont les principaux sont deux lettres adressées par Roberval à Torricelli, la première le 1er janvier 1645, la seconde dans l'hiver de 1646-1647 (1). Des historiens comme Cantor, Zeuthen et Loria, bien qu'ils n'aient pas foi en l'assertion du géomètre de Paris

(1) Les parties de la lettre, envoyée le 1er janvier 1646, regardant la cycloïde, ont été reproduites par Carlo Dati, dans la *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate*, etc. (Firenze, 1663), p. 12; par Gröning dans sa *Historia cycloeidis* (Hamburg, 1701), p. 28-34, et dans les *Œuvres de Descartes*, éd. Adam et Tannery, t. V, 1903, p. 426-427. La lettre de 1646-1647 fut imprimée pour la première fois dans les *Divers ouvrages de mathématiques et de physique par Messieurs de l'Académie royale des Sciences* (Paris, 1693), p. 284-302. Enfin les deux lettres sont imprimées *in extenso* dans la nouvelle édition des *Opere di Ev. Torricelli*, vol. III (Faenza, 1919), p. 349-356 et 487-508 (*voir* cependant ce *Bulletin*, 2e série, t. XLIV, 1920, p. 241-242).

disant qu'il enseignait sa méthode mécanique des tangentes déjà en 1636, n'hésitent pas à conclure, des mots dont il se sert, que sa découverte de la quadrature date de 1634. Assez d'autres cependant ont eu beaucoup moins de confiance dans les deux lettres citées, écrites au milieu des disputes, qui étaient engagées entre l'auteur et son correspondant précisément sur la courbe en question ; et d'ailleurs, grâce au sens qu'on donnait aux passages relatifs à la cycloïde, ceux-ci semblaient contredire ce qui était connu par d'autres sources. En effet, les expressions de Roberval semblent impliquer (Pascal, dans son *Histoire de la Roulette*, paraît avoir été le premier victime de cette erreur d'interprétation) qu'il communiqua le résultat de sa quadrature aux géomètres un an après 1634, donc en 1635. Mais il résulte de la correspondance de Mersenne avec Fermat et Descartes, qui comprenait jusqu'à présent les premiers documents datés sur la découverte de Roberval, qu'une telle Communication n'arriva pas avant le commencement de 1638. Il y eut donc des historiens comme Montucla et Tannery, qui conclurent que la découverte de la quadrature ne peut dater que d'une époque plus récente. Une telle hypothèse avait d'ailleurs l'avantage d'être davantage en accord avec ce qu'on croyait pouvoir établir sur la découverte de la méthode mécanique de Roberval pour le tracé des tangentes. Dans sa lettre de 1646-1647, celui-ci déclare l'avoir trouvé en même temps que ses premiers résultats sur la courbe. Or, dans une profonde étude, Jacoli croyait pouvoir conclure des lettres de Descartes que cette méthode mécanique était encore inconnue à Roberval dans l'été de 1638, et peut-être même en 1639. Sans aller si loin que l'auteur italien, qui suppose donc que la découverte de la méthode par Roberval est à peu près contemporaine de la découverte de la même méthode par Torricelli, la conclusion de Jacoli a été acceptée par Marie [1], Tannery [2], Zeuthen et Loria.

Nous croyons pouvoir mettre en évidence quelques fautes qu'on a commises, soulever les contradictions apparentes dans les documents, et réconcilier enfin les vues différentes, à l'aide d'une lettre contemporaine de Roberval, jusqu'à présent inconnue, que nous

---

[1] *Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, t. IV, 1884, p. 116.

[2] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVII, 1893, p. 64.

publions ci-après. Cette lettre existe en deux copies. L'une se trouve dans un cahier manuscrit, dressé à Paris, dans l'hiver de 1642-1643, par François van Schooten, et conservé à la bibliothèque de l'Université de Groningue. L'autre se trouve dans un recueil, qui fut dressé probablement vers 1645 et arriva en Italie où il est conservé aujourd'hui, parmi les papiers de Viviani, à la bibliothèque nationale de Florence. Ces deux recueils comprennent, pour la plus grande partie, des copies d'écrits de Fermat, et nous en avons parlé amplement dans l'Introduction à un Supplément aux *Œuvres* de ce géomètre, qui se trouve sous presse [1].

Pour la construction de sa courbe, Roberval part, dans la lettre suivante, d'un paradoxe, qui nous est conservé par Aristote ou par l'auteur alexandrien auquel on attribue la collection des *Questions mécaniques*. Dans la 24e ou 25e *Aporie*, ce paradoxe sur la figure connue sous le nom de *Rota Aristotelis*, est énoncé comme suit : *On demande comment, lorsque deux cercles ont un même centre, la révolution par roulement se fait, pour le plus grand comme pour le plus petit, suivant des lignes égales, tandis que, si on les fait rouler isolément, les lignes correspondant à leur révolution sont entre elles comme les grandeurs* (diamètres) *de ces cercles. De plus, comment, lorsque le centre est le même pour les deux cercles, la ligne correspondant à la révolution par roulement est tantôt de la grandeur* (de la circonférence) *du petit cercle, tantôt de celle du grand cercle.*

Le grand nombre des savants qui ont commenté ce paradoxe, depuis que les ouvrages du Stagirite ont été divulgués par la presse, ne le croyait pas inférieur au problème de la quadrature du cercle, pour la solution duquel on espérait même tirer quelque secours de l'étude de la question de la roue. Celle-ci fut comptée au nombre des problèmes les plus fameux. Des épithètes telles que *mirabilis*, *subtilissima*, *omnium difficillima* accompagnent les Notes consacrées au paradoxe par Nicolas Leonicus (1525), Allessandro Piccolomini (1547), Maurolic, Cardan (1570), Baldi (1582), Benedetti (1585) et Monantheuil (1599). Sans doute, la figure empruntait son nom à sa ressemblance avec la roue d'un chariot, dont la cir-

---

[1] *Œuvres de Fermat*, etc. *Supplément aux Tomes I-IV*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921, p. IX et suiv.

conférence est formée par le cercle plus grand, appelé le déférent (*circulus deferens*) et le moyeu par le cercle plus petit (*circulus delatus*). Le roulement d'une telle roue pouvait présenter chaque jour, dans la rue, aux contemporains de de Vinci, de Cardan et de Viète la question de la courbe décrite par un point de la circonférence, qui parcourt sur sa tangente une distance (*base*), estimée égale à cette circonférence (*cyclois simplex*). Mais c'est l'étude du paradoxe d'Aristote qui put donner l'occasion d'ajouter à ce cas, de la manière la plus naturelle, ceux des deux courbes affines, telles qu'on les trouve produites dans les documents les plus anciens : la cycloïde raccourcie (*curtata, inflexa*), quand la base est plus grande, et la cycloïde allongée (*oblongata, nodata*), quand la base est plus petite que la circonférence du cercle générateur.

En effet, pour croire que ce fût par l'étude de la roue d'Aristote que Mersenne, vers l'année 1615, fut amené à étudier le problème de la cycloïde, nous avons des raisons au moins aussi fortes que pour ajouter foi au récit un peu colorié de Pascal. En relevant cette date de 1615, Pascal assure que Mersenne se proposa le problème de la cycloïde en voyant rouler les roues d'un chariot dans la rue. Or, nous savons que Mersenne enseignait dans les années 1615, 1616 et 1617 aux environs de Nevers la philosophie (1). Le religieux, dont on disait que rien ne lui échappait qui s'imprimait en France ou ailleurs, aura eu l'occasion de prendre connaissance des nouveaux commentaires de Blancanus sur le paradoxe d'Aristote, qui virent le jour précisément en 1615. Du moins le Minime les citera, comme ceux de Baldi, parus en 1621, dans sa première publication, parue en 1623, à l'endroit où il tâche de donner une solution personnelle du fameux paradoxe, auquel il promet de revenir (2). A notre grand regret, nous n'avons pas pu consulter l'unique exemplaire conservé de la *Synopsis mathematica*, publiée

---

(1) La ville de Nevers est nommée expressément dans une relation postérieure. *Voir* les prélégomènes à la plus récente édition de l'*Histoire de la Roulette* [*Œuvres de Blaise Pascal*, éd. Brunschvicg, Boutroux et Gazier, t. VIII (Paris, 1914), p. 184].

(2) *Quæstiones celeberrimæ in Genesim, cum accurata textus explicatione*, etc. (Lut. Par., Seb. Cramoisy, 1623) (Approbation du 14 février 1622, Privilège du 17 février 1622, achevé d'imprimer du 1er février 1623), col. 68-70.

par Mersenne en 1626, qui renfermerait, selon Duhem [1], une nouvelle édition des *Questions mécaniques*, et donc peut-être des commentaires nouveaux du Minime sur la question de la roue.

La question se pose si Pascal a eu vue de telles publications de Mersenne, quand il affirme que le Minime aurait proposé, vers cette époque, la recherche de la nature de la cycloïde « à tous ceux de l'Europe qu'il en crent capable et entre autres à Galilée ». Quant au savant de Florence, il serait facile de mettre en évidence la grande probabilité d'une communication plus directe, faite à celui-ci de la part du Minime, comme d'une pareille, en 1625, à Giovanni de Guevara. Mais nous nous bornons à rappeler que le dernier publia, lui-même, dans un Ouvrage paru en 1627, sa propre solution du paradoxe d'Aristote; il déclare que ce paradoxe contient une difficulté *quæ multorum quippe vexavit ingenia et pene insuperabilis apud aliquos existimatur*, en faisant déjà allusion aux cycloïdes tant ordinaires que raccourcies et allongées. Cet Ouvrage de Guevara se trouva bientôt à Paris dans les mains de Mersenne, qui le cite, avec ceux de Monantheuil, Blancanus et Baldi, dans sa publication suivante [2], et en tire l'occasion de faire de nouvelles propositions sur la question débattue.

Une telle proposition arriva, en 1628, à Roberval, qui avait assisté au siège de La Rochelle et s'était fixé nouvellement à Paris à l'âge de 27 ans. Dans sa lettre de 1645-1646 (qui ne fut expédiée que le 1er janvier 1646), le géomètre déclare ne pas savoir avec certitude par qui le problème a été proposé le premier, mais affirme que ce problème était divulgué en France déjà depuis beaucoup d'années. Ces expressions s'adaptent aussi bien à la question de la figure de la cycloïde qu'à la question plus ancienne du paradoxe d'Aristote. En effet, lorsque Roberval relève à nouveau la proposition de Mersenne dans sa lettre de 1646-1647, il unit aussi les problèmes des deux figures (*Rotæ atque Trochoïdum illius*). Dans le dernier document il dit d'ailleurs que Mersenne lui avait communiqué alors que plusieurs personnes avaient tenté en vain

---

(1) *Les Origines de la Statique*, t. I (Paris, 1905), p. 295, 297; t. II (1906), p. 123, 187-188.

(2) *Les questions théologiques, physiques, morales et mathématiques*, etc., *composées par L*[e] *P*[ère] *M*[ersenne] (Paris, Henry Guénon, 1634), p. 38.

pendant beaucoup d'années de trouver la solution de la question; à quoi le géomètre lui fit remarquer qu'il en était de même pour beaucoup d'autres problèmes très anciens et très nobles (*vetustissimis nobilissimisque*).

A cette occasion, Roberval ne réussit pas à trouver la solution du problème de la forme de la cycloïde, et il fallut attendre des progrès ultérieurs de sa part dans la géométrie. Ainsi le problème était déjà effacé de sa mémoire, lorsque le Minime le lui proposa de nouveau. C'était à la fin de 1633, selon la lettre de 1645-1646; en 1634, selon celle de 1646-1647. L'auteur, dans son Traité *de Trochoïde ejusque spatio*, déclare avoir trouvé le complexe des découvertes sur la cycloïde entre les années 1635 et 1640. Enfin, selon Mersenne, ce sont les premiers résultats obtenus par Roberval qui remontent à l'année 1634 (1); et la même date de 1634, nous est indiquée dans le récit de Pascal, qui ajoute que Mersenne renouvela la proposition en voyant alors Roberval résoudre plusieurs grands problèmes.

Tandis que nous différons de démontrer qu'aucun fait ne s'oppose à l'admission de ces dates presque concordantes, nous remarquons déjà ici qu'une nouvelle proposition de la question, de la part de Mersenne, avait alors, vers l'année 1634, des raisons particulières.

En 1634, le concours public pour la chaire de Ramus dans les mathématiques, qui commençait d'ordinaire, tous les trois ans, vers Pâques, avait fait triompher Roberval, et Mersenne avait entretenu Descartes des questions alors proposées (2). D'autre part, c'était vers la même époque que le Minime publia un nouveau commentaire sur la roue d'Aristote, auquel il consacra la

---

(1) *Reflectiones physico-mathematicæ* (Paris, 1647), p. 71. — Notre interprétation de ce passage diffère de celle donnée par Tannery, qui l'a relevé ainsi : «...lorsqu'il [Mersenne] y dit : *Clarissimus enim D. de Roberval, quem aliàs nostrum appello Geometram, et qui primus omnium Trochoïdem ipsam atque ipsius solida et eorum omnium centra gravitatis invenit et iam ab anno* 1634 *demonstrata mecum et pluribus aliis communicavit....* il est clair que 1634 ne peut être qu'une faute d'impression (probablement pour 1643) » (*Œuvres de Descartes*, t. V, 1903, p. 428).

(2) *Œuvres de Descartes*, t. I, 1897, p. 288, 291; *voir* pour ces questions aussi la lettre de Roberval à Hevelius de 1650 [Ch. Henry, *Huygens et Roberval* (Leyde, 1880), p. 41].

plus grande partie de la Préface de sa traduction d'un manuscrit de Galilée, dont l'achevé d'imprimer est du 30 juin 1634. D'ailleurs, dans la dernière de ses additions à cette traduction [1], Mersenne renvoie déjà à quelques passages du Livre second, intitulé *des Mouvements*, de son grand Ouvrage de l'*Harmonie universelle*, qui lui avait coûté, comme il l'écrivit à Peiresc, « plus de dix ans de labeur assez particulier ». Des lettres du Minime à son Mécène, il ressort aussi que cet Ouvrage était achevé en manuscrit le 20 mars 1634, qu'il en commença l'impression en juillet 1634 et qu'un exemplaire imprimé du Livre second fut envoyé à Aix le 17 septembre 1635 [2]. Or c'est précisément ce Livre second qui comprend le premier énoncé imprimé de Mersenne sur la figure de la cycloïde : l'expérience, dit-il, lui avait fait voir que cette figure était identique à une demi-ellipse [3].

La détermination de la forme exacte de la courbe est la première question à aborder, avant d'arriver aux autres problèmes de la cycloïde; ce fut sans doute elle que Roberval trouva le premier. Et selon nous, rien ne s'oppose à ajouter foi aux paroles du géomètre lorsqu'il déclare avoir trouvé sa méthode mécanique pour la construction des tangentes en même temps, c'est-à-dire vers 1634, qu'il détermina cette forme, assertion qu'il énonça déjà dans une lettre à Fermat de 1640 [4]. Il est vrai que Descartes, en envoyant sa construction de la tangente à la cycloïde à Mersenne dans l'été de 1638, répond à un défi de la part du Minime, qui lui avait communiqué, sans plus, que Roberval avouait ne pas pouvoir trouver cette tangente [5]. Le même défi donna lieu aussi à un envoi de la part de Fermat [6]. Mais pour mettre en évidence la fausseté de l'interprétation qu'on a donnée à ce fait,

---

(1) *Les Méchaniques de Galilée*, etc., traduites de l'italien par L[e] *P*[ère] *M*[arin] *M*[ersenne] (Paris, Henri Guénon, 1634), p. 88.

(2) Tamizey de Larroque. *Les correspondants de Peiresc* : xix. *Le Père Marin Mersenne* (Extrait de la *Revue historique et archéologique du Maine*, 1892-1894, p. 78-79, 98, 109, 122-123, 130, 132-133, 134, 147-148, 149, 150, 151, 152-153, 155-156, 157, 160-161, 162-163).

(3) *Harmonie universelle*, vol. I (Paris, 1636), livre II, Prop. IX (p. 120).

(4) *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 200-201.

(5) *Œuvres de Descartes*, t. II, 1898, p. 312, 394.

(6) Ouvrage cité ci-avant (p. 208, Note 1), aux pages 95-97.

nous n'avons qu'à reprendre une thèse émise plus tard par Tannery [1]. Pour juger justement, il faut se rappeler qu'on faisait alors une distinction essentielle entre des solutions obtenues par la géométrie ou voie d'analyse et celles obtenues par des considérations mécaniques, qui étaient bannies du domaine de la Géométrie. L'histoire de la cycloïde elle-même nous fournit un autre exemple. Lorsque Torricelli communiqua plus tard aux géomètres de Paris le résultat de la détermination du centre de gravité de la courbe (qu'il avait obtenu, sans le dire, par l'application de la règle de Pappus-Guldin), Mersenne lui écrivit, le 24 juin 1644, au nom de de Roberval lui-même, de faire connaître s'il n'a trouvé ce résultat que par voie mécanique (*mechanicè tantum*), qui est jugée inadmissible, et même fausse, dans des problèmes de géométrie (*quæ geometricè falsa suspicatur*). Et Roberval fit de telles distinctions même entre les solutions géométriques mutuelles [2]. Ainsi on peut seulement conclure des expressions de Fermat et de Descartes que c'était à la construction de la tangente à la cycloïde par voie d'analyse que le géomètre de Paris avait avoué avoir échoué [3]. La construction au moyen de la méthode mécanique est ici hors du débat et peut très bien avoir été trouvée vers 1634, comme tout le principe de cette méthode, par laquelle la tangente à la cycloïde se construit en vérité de la manière la plus facile et la plus naturelle.

Comme à la découverte des fondements de la méthode mécanique des tangentes, on peut donc attribuer la date d'environ 1634 aussi à la découverte de la forme exacte de la courbe. C'est la

---

(1) *Œuvres de Descartes*, t. II, 1898, p. 338-341.

(2) A propos de la solution d'un autre problème, envoyée à Paris par Torricelli, il remarqua *demonstrationem per solida* (c'est-à-dire par moyen de sections coniques), *quam per plana* (droite et cercle) *fieri potest, ignobilem esse, et propemodum errorem* [*Opere di Ev. Torricelli*, vol. III (1919), p. 438].

(3) De telle manière procéda la solution de Fermat. Le fait que celle de Descartes (qui avait exclu la cycloïde, comme courbe mécanique, du nombre de celles auxquelles sa méthode s'appliquait) réussit par l'application de la théorie du centre instantané de rotation, et, par conséquent, ne satisfait pas davantage à la condition, ne contredit pas notre thèse, puisque le philosophe ne répéta, à l'égard de Roberval, que ce que Mersenne lui avait confié sans s'expliquer avec assez de précision.

détermination de cette forme que Roberval comprend aussi bien que celle de la quadrature parmi les résultats qu'il dit avoir trouvé dans le passage mal rédigé de sa lettre de 1645-1646. Mais on n'est pas contraint d'attribuer à la découverte de la quadrature cette même date de 1634 aussi. C'est à tort, croyons-nous, que les historiens qui sont de cet avis, ont déduit du passage cité que c'était au moment même de la seconde proposition de Mersenne ou de la découverte de la figure, vers 1634, que Roberval trouva aussi la quadrature de la courbe. Celle-ci réussit en effet par l'intermédiaire d'une sinusoïde (*compagne de la Roulette*) d'une manière trop particulière pour que la solution pût en être trouvée aussi facilement. D'ailleurs Roberval avoue à l'endroit cité qu'il prit soin de faire savoir aux autres géomètres qu'il avait réussi dans de quelconques recherches sur la courbe, en tenant secret le *résultat* de la quadrature *pendant toute une année*. Cette confession interdit décidément de faire remonter la première Communication à l'année 1634 aussi. Nous avons déjà vu qu'une telle hypothèse nous conduit à supposer que le résultat de la quadrature fut communiqué en 1635, comme l'avait déjà fait Pascal, à qui Roberval avait sans doute remis, en 1658, tous les papiers concernant le procès [1]. La dernière supposition, émise aussi par Tannery [2], est en contradiction évidente avec les lettres contemporaines, qui font voir que la Communication du résultat n'arriva qu'au commencement de 1638. Pour faire concorder les documents l'un avec l'autre et tous ensemble avec les faits connus par ailleurs, il est donc nécessaire de fixer la date de la première Communication de Roberval au commencement de 1637. Quant à la quadrature et le volume engendré par la révolution de la courbe autour de la sa base, les expressions elles-mêmes, dont il se sert dans sa lettre de 1645-1646, ne semblent pas s'opposer à la fixation de la date de leur découverte à une époque indéterminée entre l'année 1634 et la fin de 1636.

---

[1] Nous ne soutenons pas l'opinion que l'*Histoire de la Roulette* aurait été rédigée par Roberval lui-même ou écrite sous sa direction comme l'a soutenu M. Stuyvaert en s'appuyant sur des arguments tirés du style de cet écrit [*Sur l'auteur de l' « Histoire de la Roulette », publiée par Blaise Pascal* (*Bibliotheca mathematica*, 3e série, t. VIII, 1908, p. 170-172)].

[2] *Œuvres de Descartes*, t. V, 1903, p. 426.

Qu'est-ce qui arriva donc à la fin de 1636 ? En octobre ou novembre de cette année, Mersenne avait vu, à Paris, dans les mains du comte de Noailles ou de Louis Elsevier, le manuscrit des *Discorsi* de Galilée, qui allait être imprimé à Leide, et même le Minime se vantait de l'avoir lu (1). Sa curiosité sera excitée à nouveau en voyant la solution du fameux paradoxe de la roue que le savant d'Arcetri avait de son côté voulu donner (2); Mersenne en aura tiré occasion d'interroger à nouveau Roberval sur le problème. En tout cas, il adressa à celui-ci, vers cette époque, une lettre dans laquelle il lui apprit qu'il croyait à présent que la courbe, dont il avait été déjà question entre eux, était une hélice; Roberval répondit à Mersenne par la lettre du 6 janvier 1637 que nous publions ci-après et que nous tenons précisément pour le document auquel il fait allusion plus tard, quand il prétend avoir communiqué aux géomètres qu'il avait réussi dans sa recherche sur la courbe, sans avoir fait mention du résultat de la quadrature, qui consiste dans la proportion triple de l'aire de la courbe à celle de son cercle générateur. En effet, quoiqu'il n'est pas exclu que le géomètre fit connaître à Mersenne le résultat même de la quadrature par une Communication contemporaine et orale (3), l'auteur répond dans sa lettre tout d'abord à la question que le Minime lui avait proposée; et le succès de ses recherches sur les propriétés métriques de la cycloïde ne résulte que de son assertion que ces propriétés sont tout à fait différentes de celles des courbes connues jusqu'alors et qu'il est en état de les faire connaître.

La réserve de Roberval s'explique par le fait qu'au commencement de 1637, il avait toutes ses raisons de ne pas trop s'exposer. Selon le testament de Ramus (4), le concours public, qui avait

---

(1) *Le Opere di Galileo Galilei*, ed. naz., vol. XVI, 1905, p. 480, 490, 500-501, 507, 512, 514, 524 et surtout vol. XVII, 1906, p. 63, 64, 80.

(2) *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, etc. (Leide, 1638), p. 19-22, 50 et suiv.

(3) « Il [Roberval] » raconte Pascal, « dit au Père [Mersenne] que sa question estoit résoluë, et celuy déclara mesmes cette raison triple, en exigeant néantmoins qu'il la tiendroit secrette durant un an » (*Œuvres de Bl. Pascal*, éd. cit., t. VIII, 1914, p. 196).

(4) Ch. Waddington, *Ramus, sa vie, ses écrits et ses opinions* (Paris, 1855), p. 326-328, 338. — Sédillot, *Les professeurs de mathématiques et de physique générale au Collège de France* (Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze mat. e fis.*, t. II, 1869, p. 76).

donné au géomètre la chaire en 1634, devait se renouveler tous les trois ans, par conséquent devait avoir lieu de nouveau en 1637. Or, Roberval nous apprend dans sa lettre de 1645-1646 que c'était pour ce second secours qu'il avait réservé ses découvertes sur les propriétés métriques de la cycloïde. S'il avait indiqué expressément dans sa lettre de janvier 1637 qu'il avait trouvé la quadrature, d'autres auraient tenté sans doute de résoudre ce problème, et peut-être y auraient réussi assez vite, comme le prouvent plus tard les exemples de Descartes et de Fermat. En effet, tout mène à ajouter foi à l'assertion de Roberval que sa lettre à Mersenne circulait parmi les autres géomètres. Bientôt Mersenne entretenait aussi Fermat (avec qui il était entré en correspondance depuis le printemps de 1636) de l'Ouvrage de Galilée, pas encore imprimé [1], et lui demandait des éclaircissements sur le problème de la roue, que Fermat ne tardait pas à lui envoyer [2]. C'était probablement vers la même époque que Mersenne envoya au géomètre de Toulouse la lettre de Roberval. Toutefois, une de nos copies porte les marques qui montrent qu'elle a passé par les mains de Fermat [3]. Et lorsque Roberval lui-même écrit, après un long silence, à Fermat, le 1er juin 1638, sur la question de la cycloïde, il apparaît [4] qu'il sait que son correspondant connaît les conditions du problème.

(A suivre.)

---

(1) *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 112 (lettre d'avril ou de mai 1637, voir *Œuvres de Descartes*, t. I, 1896, p. 361).

(2) Le 10 août 1638, Fermat répondit à Mersenne qu'il lui avait envoyé ses pensées sur la question 25 des *Méchaniques* d'Aristote « il y a longtemps, tout au long » (*Œuvres*, t. II, 1894, p. 166).

(3) *Voir*, ci-après, la deuxième Note relative au titre de la lettre.

(4) *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 151.

1ère Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ADHÉMAR (Robert d'). — Résistance des matériaux. Chez Gauthier-Villars, 180 pages in-8°, 1921.

Ce petit Volume présente sous une forme succincte les bases essentielles de la théorie de la Résistance des matériaux. Sa brièveté même est l'un de ses grands mérites, et en fait un Ouvrage didactique particulièrement recommandable : Le contenu réel, très simple, de la théorie de la Résistance y est bien mis en évidence ; les hypothèses y sont nettement énoncées ; et l'auteur a le mérite de signaler, chaque fois que cela est utile, ce qu'elles peuvent avoir d'aléatoire. Cette présentation condensée et sincère place la théorie dans son vrai plan, et elle a une toute autre valeur, au point de vue de la formation intellectuelle des ingénieurs, qu'un traité touffu bourré de ces calculs d'apparence savante dont l'appareil impressionne le lecteur au point de lui faire trop souvent oublier le vide de certaines conclusions élégamment déduites de prémisses par trop fragiles.

Traiter théoriquement *a priori* les sciences expérimentales les plus complexes est une déformation intellectuelle qui a fait trop de mal depuis longtemps, et particulièrement dans notre pays, pour que l'on ne se félicite pas vivement chaque fois qu'apparaît un Ouvrage destiné aux ingénieurs, et bien dégagé de cette dangereuse tendance.

Les déformations élastiques des constructions sont un phénomène expérimental, leur étude relève donc avant tout de l'observation expérimentale ; l'auteur a eu soin de l'exprimer nettement dans sa conclusion, et de signaler certaines erreurs fondamentales qu'a mises en évidence l'étude expérimentale des voûtes dans les conclusions des calculs *a priori* effectués avec les approximations ordinairement admises par la théorie classique. On ne saurait d'ailleurs parler des efforts tentés pour introduire une critique

précise et logique, basée sur le bon sens et l'expérience, dans l'enseignement de la Résistance des matériaux, sans mentionner le Traité de M. Bonasse, auquel l'auteur a rendu un juste hommage.

L'Ouvrage commence par une Introduction en deux parties où sont rappelées les notions indispensables d'Analyse et de Mécanique. Les trois premiers Chapitres définissent les coefficients d'élasticité, les phénomènes élémentaires de compression, de traction et de torsion, et les forces élastiques dans un solide déformé. Les Chapitres IV et V sont consacrés à la théorie de la flexion symétrique plane, que les Chapitres VI, VII et VIII appliquent aux divers problèmes relatifs aux poutres, et le Chapitre IX à quelques problèmes pratiques qui en dérivent. Le Chapitre X est consacré au phénomène de flambage. Le Chapitre XI introduit la notion de glissement longitudinal, pour servir à l'étude du béton armé, à laquelle sont consacrés les deux derniers Chapitres (XII et XIII).

JEAN VILLEY.

ŒUVRES COMPLÈTES DE CHRISTIAAN HUYGENS, publiées par la Société hollandaise des Sciences, Tome XIV : *Calcul des Probabilités, Travaux de Mathématiques pures* (1655-1666). La Haye, Martinus Nijhoff, 1920.

Le Tome XIV des *Œuvres complètes de Huygens* contient une série d'écrits qui offrent un intérêt tout particulier en raison de la lumière qu'ils jettent sur les premières études mathématiques de Huygens et sur ses relations avec les savants français.

Nous trouvons d'abord, dans ce Tome, le texte hollandais du Traité *De ratiociniis in ludo aleæ*, accompagné d'une traduction française. L'origine de ce Traité est, comme on sait, la question posée à Pascal en 1654 par le Chevalier de Méré, question qui fut étudiée par Pascal et Fermat dans une série de lettres, et dont Huygens fut instruit lors de son séjour à Paris en 1655. A la suite du Traité, les éditeurs reproduisent la série des appendices qu'Huygens y a successivement ajoutés (le dernier est de 1688).

La seconde Partie du Tome XIV est consacrée aux manuscrits mathématiques de Huygens provenant de la période 1655-1659. Presque tous ces écrits se rapportent à des problèmes et à des méthodes suggérés à Huygens par les travaux de ses amis français.

Ce sont des questions sur la théorie des nombres et sur l'équation dite de Pell, dont s'occupent Fermat, Frenicle, Sainte-Croix, et que Mersenne a signalées au jeune Huygens. Ce sont des questions sur les paraboles, sur la quadrature du conoïde (parabolique, elliptique ou hyperbolique), la cubature des solides de révolution, la recherche des centres de gravité, qui se rattachent directement aux travaux de Pascal, Fermat, Mylon. C'est enfin la solution de quelques-uns des problèmes relatifs à la cycloïde proposés en 1658 par Dettonville (Pascal). L'ensemble de ces écrits nous permet d'apprécier le rôle considérable qu'ont joué les influences françaises dans la formation mathématique de Huygens.

Sur un point de détail nous pouvons compléter une indication donnée par les éditeurs de Huygens. Il s'agit d'un opuscule de Frenicle traitant des problèmes de Fermat. Se référant à Cantor (*Vorlesungen*, t. II, 2e édition, p. 784; voir aussi *Œuvres de Fermat*, édition Tannery-Henry, t. II, p. 434, Note 3), les éditeurs nous disent que cet opuscule semble perdu. Cela n'est pas exact. J'ai en effet récemment retrouvé l'opuscule de Frenicle (avec d'autres écrits oubliés du même auteur) à la Bibliothèque nationale (au catalogue de laquelle il ne figure d'ailleurs pas). Son titre exact est le suivant : *Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos, quæ tanquam insolubilia universis Europæ Mathematicis à clarissimo viro D. Fermat sunt proposita et ad D. Cl. M. Laurenderium doctorem Medicum transmissa, à D. B. F. D. B. inventa*, *Paris*, *I. Langlois*, 1657.

Pierre Boutroux.

MÉLANGES.

UNE LETTRE INÉDITE DE ROBERVAL DU 6 JANVIER 1637 CONTENANT LE PREMIER ÉNONCÉ DE LA CYCLOIDE

(*suite et fin*):

PAR M. C. DE WAARD.

Il résulte de ce qui précède que cette année entière (*annum integrum*), pendant laquelle Roberval dit avoir gardé secret le résultat de la quadrature, ne s'étend pas de 1634 à 1635, comme on l'a cru, mais de janvier 1637 jusqu'au même mois de 1638. Cette année étant passée, dit-il, puisque personne n'avait contesté la chaire à Roberval, il communiqua ce résultat sans démonstration. On sait que cette assertion concorde aussi avec les faits et que cette communication arriva de nouveau par l'intermédiaire de Mersenne. La communication à Fermat résulte d'une lettre-réponse du géomètre de Toulouse datée de février 1638 (1). La communication à Descartes fut faite par une lettre du Minime au philosophe, datée du 28 avril 1638 (2). Enfin Roberval lui-même entretenait Fermat de la quadrature, ainsi de la cycloïde ordinaire que des cycloïdes allongées et raccourcies, dans une lettre déjà citée du 1er juin 1638.

Comme résumé de notre thèse nous donnons l'interprétation suivante du passage incriminé de la lettre de Roberval de 1645-1646 :

...*tandem anno duodecimo iam elapso, ego a Reverendo nostro Mersenno non levi expostulatione incitatus* (c'est-à-dire fin de 1633 ou commencement de 1634), *in illius demonstrationem incidi* (1634 ou 1635 quant à la construction de la figure de la courbe et la première application de la méthode mécanique des tangentes, l'époque de 1634 jusqu'à la fin de 1636 quant à la découverte des deux propriétés métriques), *quæ tamen per annum integrum* (janvier 1637 jusqu'à janvier 1638) *cum nemine ex nostris Geometris communicavi*,

(1) *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 135.

(2) *Œuvres de Descartes*, t. II, 1898, p. 116-117.

sed tantum curavi (par la lettre suivante de janvier 1637) *ut ipsi me invenisse rescirent nondum patefacta illis ratione subsesquitertia* (1), *quam illa obtinet ad suum parallelogrammum. Anno autem illo* (1637) *elapso, quia publicum certamen pro cathedra regia quod expectabam, et cui talem novam propositionem cum suis tangentibus et solidis servabam, non obtigerat, aperui* (commencement de 1638) *subsesquitertiam illam rationem sine demonstratione; ac tum duo ex nostris geometris, nempe D. de Fermat* (en juillet 1638) (2), *et D. Descartes* (en mai et juillet 1638) (3) *demonstrationes invenerunt, inter se penitus et a nostra diversas....*

A défaut de documents décisifs, celui qui désire reconstruire l'histoire des premières découvertes de Roberval sur la cycloïde, devra recourir à des conjectures sur le sens précis de ses assertions. Tant que les hypothèses qu'on a formées jusqu'à présent mènent à des contradictions ou rendent suspects des documents écrits par des hommes dignes de foi, nous pouvons être excusés d'en avoir émis d'autres qui semblent donner une solution acceptable à une question qu'on a si souvent cherché à éclaircir. Mais d'ailleurs nous sommes obligés de mettre en doute, la valeur du fondement sur lequel quelques historiens ont bâti leur conclusion, que la découverte de la quadrature par Roberval remonte à une époque antérieure à 1637 ou date de cette année même.

En effet Montucla, Marie (4), Tannery (5) et quelques autres (6) ont fondé cette conclusion sur le fait que Mersenne a publié le résultat de la quadrature obtenu par Roberval dans le cahier des *Nouvelles observations* (7), qu'ils croient avoir été publiés en 1637, parce qu'il se trouve à la fin du Volume second de l'*Harmonie universelle*, dont un exemplaire imprimé fut envoyé à Peiresc le

(1) 3 : 4, selon la terminologie de Boèce.

(2) *Œuvres de Fermat*, etc. *Supplément aux tomes I-IV*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921; pages 87-95.

(3) *Œuvres de Descartes*, t. II, 1898, p. 135 et suiv., 257 et suiv.

(4) *Histoire des sciences math. et phys.*, t. IV, 1884, p. 65, 114.

(5) *Bibliotheca mathematica*, 3e série, t. I, 1900, p. 511. — *Œuvres de Descartes*, t. V, 1903, p. 428.

(6) Par exemple Wallner dans la *Bibliotheca mathematica*, 3e série, t. IV, 1903, p. 41-42.

(7) *Observation XI*, p. 24-25.

15 mars 1637. Or il résulte de toute notre histoire qu'il est à peu près impossible que le Minime ait publié le résultat dans l'année même qui avait pour Roberval, à cause du concours (qui durait plusieurs mois), une si grande importance : le géomètre aurait protesté vivement. D'ailleurs Descartes et Fermat, dont le cahier donne quelques découvertes faites depuis l'impression de l'Ouvrage principal, auraient connu le résultat dès le printemps de 1637, de telle sorte que Mersenne n'aurait pas eu besoin de leur annoncer au commencement de 1638. Nous croyons donc plutôt que le cahier en question ne fut constitué que vers l'époque de la communication du résultat de la quadrature aux géomètres ou à celle que Mersenne arriva de nouveau Fermat et Descartes avec la question de la roue d'Aristote, à propos de la solution de Galilée alors nouvellement publiée [1], à savoir au printemps ou pendant l'été de 1638, et que le cahier fut ajouté alors comme complément, avec pagination spéciale, aux exemplaires non vendus de l'Ouvrage principal. Cela explique que le cahier ne se trouve pas dans tous les exemplaires. L'Ouvrage principal lui-même montre aussi des irrégularités : on voit dans la description exacte donnée par Brunet, que l'ordre des parties séparées n'est pas toujours constant, et même on trouve des exemplaires portant des titres différents. La même chose arrive avec l'édition abrégée en latin, *Harmonicorum libri XII*, qui parut en 1636 et qui présente même parfois des dédicaces diverses. Cette édition a subi du reste une addition pareille à celle que nous imputons à l'original français : en 1648, on donna de cet abrégé en latin une nouvelle édition qui est néanmoins identique, page pour page (les fautes d'impression comprises), à celle de 1636, sauf qu'on a remplacé le titre ancien et ajouté un *Liber novus prælusorius*, pour relever quelques découvertes postérieures, dont une regarde aussi la cycloïde. Des autres publications de Mersenne montrent de pareilles additions [2].

---

[1] *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 166, et *Œuvres de Descartes*, t. II, 1898, p. 436.

[2] Ainsi, quant aux *Cogitata physico-mathematica*, publiés en 1644, nous avons vu des exemplaires avec un achevé d'imprimer du 1er avril 1644, et d'autres portant un achevé d'imprimer du 15 septembre 1644; ils diffèrent par des suppléments à des suppléments et des corrections à des corrections que le Minime avait coutume d'ajouter à ses Ouvrages.

Le cahier des *Nouvelles observations* ne figure donc, dans l'histoire de la cycloïde, que pour ainsi dire comme un document sans date. Quand on se place à ce point de vue, le fait que ni Carcavy, ni Pascal n'ont invoqué le cahier pour établir la priorité de Roberval sur Torricelli, est moins étrange qu'on ne l'a cru. On ne peut supposer qu'il fut constitué avant le 3 septembre 1638 ou avant le 11 mai 1639, dates respectives du privilège et achevé d'imprimer des *Nouvelles pensées de Galilée*, dans lesquelles Mersenne cite le cahier [1]. C'est dans cette paraphrase des *Discorsi* de Galilée que le Minime traita tout au long de l'explication du savant d'Arcetri sur la roue d'Aristote [2] qui ne laissa pas d'embarrasser encore beaucoup d'autres savants, témoin le dicton : *rotam Aristotelis magis torquere, quo magis torqueretur.*

Nous croyons donc que la lettre de Roberval de janvier 1637 est le plus ancien document, bien daté, dont on puisse tirer des conclusions touchant la date de la découverte par l'auteur de la méthode mécanique des tangentes, qui se fond sur la composition des mouvements. Dans cette lettre, le plus ancien document aussi qui traite de la cycloïde, Roberval se sert de cette composition pour la construction de la cycloïde et prétend qu'il peut en tirer encore beaucoup d'autres applications [3]. Le même document aide à rapprocher les dates de ses autres travaux touchant la courbe, travaux qui sont

---

[1] *Les Nouvelles pensées de Galilée*, etc. (Paris, Pierre Rocolet, 1639), p. 67 et 189 et p. 2 (non numérotée) de la Préface.

[2] Pages 30-33 (aux pages 32-33 il y fait allusion à la quadrature de la cycloïde trouvée par Descartes), puis pages 43-49.

[3] Jusqu'à présent le premier document contemporain sur la méthode mécanique des tangentes de Roberval était constitué par sa lettre du 4 août 1640 à Fermat. Il déclare avoir cru que la méthode de Fermat était identique à la sienne « *quand je vis que vous aviez trouvé les touchantes de la roulette* [cycloïde] *et que vous assuriez avoir la règle universelle pour toutes les lignes courbes* ». Or, la lettre de Fermat à laquelle Roberval fait allusion, et qui ne donne que le résultat de la construction, est du 5 août 1638 [*voir* l'Ouvrage cité ci-avant (p. 221, Note 2), aux pages 96-97]. En effet, déjà vers cette époque, Roberval avait laissé s'échapper à Mersenne « *qu'il y a un medium pour trouver les tangentes de la roulette qui s'applique à tous les cas* » (*Œuvres de Descartes*, t. II, 1898, p. 400). Cependant, il n'apparaît pas que Roberval ait démontré les effets de la méthode à d'autres qu'à Étienne Pascal (qui avait dû quitter Paris en mars 1638), et puis à Mydorge, respectivement à l'égard de la quadratrice et la cissoïde, c'est-à-dire des courbes, auxquelles il savait aussi construire la tangente géométriquement.

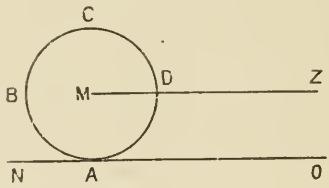
un des principaux titres de gloire de ce géomètre. Il nous a donc semblé digne d'être publié. Les leçons du manuscrit de Florence, dont nous faisons état dans la suite, sont dus au Très Révérend Père Giovannozzi, ex-directeur de l'Observatoire Ximénien. Nous les avons indiqués par la lettre *F*; celles du manuscrit de Groningue sont indiquées par la lettre *G*.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DU (1) 6 JANVIER A° 1637 (1)
AU R[ÉVÉREND] P[ÈRE] M[ERSENNE] (2).

[Groningue, Bibliothèque de l'Université, *Ms.* 110, f°s 13 verso-15 verso; Florence, Bibliothèque nationale, *Mss. Galileiani, Discepoli*, vol. CIII, f°s 99 verso-103 verso. — Copies.]

Soit le plan ou ligne droite NAO (*fig.* 1), sur laquelle roule le cercle ABCD. Vous demandés *quelle ligne courbe sera descrite par le point* A *du cercle* ABCD *iusques à ce qu'il vienne se rencontrer en la*

Fig. 1.



mesme ligne au point O, et encore *quelle ligne sera descrite par les points* B, C, *et si elle sera pareille ou égale à celle du point* A. Enfin *si celle du point* A *sera*, comme il vous semble par expérience, *une*

Lignes : 3-4. *G en la mesme ligne* omis. — 4. *F*, *G* O] AO. — *G encore* omis. — *G quelle autre ligne.*

(1) Dans le manuscrit de Florence, la date est celle du 6 janvier 1637; dans celui de Groningue, du 16 janvier 1637. S'il faut choisir entre ces deux, on pourrait remarquer que dans le dernier manuscrit, se trouve, au-dessus de notre copie, la copie d'une autre lettre, très courte, avec cet en-tête : « *Extrait d'une lettre du* 16 *décembre a°* 1636 *à M^r R* ». C'est ce qui a pu induire le copiste à faire une faute d'écriture, et la date vraie devait donc être celle du 6 janvier 1637.

(2) En marge de la copie de Florence se trouve écrit : « *Deleatur et ista epistola* ». Nous avons attribué à Fermat d'autres annotations de cette sorte dans le manuscrit (édition citée ci-avant, p. 221, Note 2).

demie-ellipse (1), *ou une Elice*, comme Vous avés mis en vostre dernière lettre (2).

Or, pour Vous respondre précisément et ne rien obmettre de ce qui peut tomber sur le suiet de cette question, il semble qu'il est préalable de sçavoir si la ligne droite AO, par laquelle tout le cercle a passé, est égale au cercle, ou si elle est moindre ou plus grande. Et c'est icy où ie voy que la pluspart des interprètes d'Aristote, au moins ceux que i'ay veux, ont failly en l'explication de la 25me (3) proposition de ses *Méchaniques*. Car sans doute la ligne AO peut estre ou plus grande, ou plus petite que la circonférence du cercle ABCD, ou bien esgale à ladite circonférence (4).

Et pour esclaircir entièrement cette proposition, il est certain que le cercle roulant sur un plan a deux mouvemens : le droit, par lequel tout le cercle s'esloigne du point A et s'approche du point O, et le circulaire, par lequel le point A tourne autour du centre M en mesme temps que le centre M se meut par la ligne MZ parallèle à NAO. Or il est très vray que non seulement les points A, B, C, D, qui sont dans la circonférence, font séparément ce mouvement circulaire, mais encore tous ceux qu'on pourra imaginer dans l'espace dudict cercle, horsmis le seul centre M, lequel n'a point de mouvement circulaire. Et c'est la raison pour laquelle tout le cercle estant meu, le seul point M descrit une ligne droite, parce que c'est le seul point qui n'a point de mouvement circulaire : et ainsy son mouvement est simple et non pas composé, comme celuy de tous les autres points, qui sont dans la circonférence du cercle ou dans l'espace qu'elle contient.

Cela supposé, il est certain que ces deux mouvemens n'ont rien de commun, et qu'ils peuvent estre esgaux ou inesgaux entr'eux : et qu'encor à les considérer chacun en soy, ils peuvent estre ou

Lignes : 8. *G veux*]*leux*. — *F de la* 25 (?) *prop.* — *G en la* 23 *prop.*, mais en marge : 24. — 21. *G* pour] *par*. — 23-24 au lieu des mots *parce que... circulaire*, *G* ne porte qu'un signe ressemblant à celle d'un 3. — 26. *G. du cercle* omis.

(1) *Voir* ci-avant, p. 212.

(2) Lettre perdue.

(3) Les documents de l'époque appellent la question tantôt la 24e, tantôt la 25e.

(4) Cette distinction mènera à celle des cycloïdes ordinaires, raccourcies et allongées.

uniformes ou difformes. Car soit imaginé tout le cercle ABCD, duquel le centre M, se mouvoir uniformement sur la ligne MZ, et soit, par exemple, le point Z le centre de la Terre, et le point M un point dans la superfitie; imaginons nous encor que, pendant que tout le cercle descend au centre, *mira circulatione moveatur circa centrum* M, en ce cas vous ne direz pas que la ligne MZ est égale à la circonférence du cercle, et néantmoins la ligne MZ est égale à la ligne AO, que le cercle touche en descendant; que, si le mouvement par la ligne MZ est difforme, la différence sera encor plus considérable. Enfin nous pouvons supposer que le mouvement circulaire est esgal ou inesgal au mouvement droit, et encore que tous deux sont uniformes ou difformes, ou que l'un l'est et que l'autre ne l'est pas.

Or, de ces deux mouvemens, à mesure qu'ils sont différens, il s'engendre (pour revenir à notre question) des lignes différentes. Néantmoins, pour éviter la longueur, nous supposerons les mouvemens uniformes et réserverons à une autre fois le discours des lignes qui sont causées par les mouvemens difformes. Mais parce que les mouvemens, quoyqu'uniformes, peuvent estre aussy esgaux ou inesgaux, il sembleroit qu'ils ne pourroient pas estre tous compris soubs une proportion; néantmoins une mesme construction sert à tous, comme nous verrons.

Il s'ensuit de ce que dessus que la ligne du mouvement droit AO est quelquefois esgale ou quelquefois inesgale à la circonférence du cercle.

Il semble que c'est icy le lieu d'expliquer en passant la raison de la question 25 (1) des *Méchaniques* d'Aristote.

Soyent en la figure suivante (*fig.* 2) les deux cercles EC, DB, desquels le centre commun soit A, un point fixe autour duquel le cercle EC roulant emporte quant à soy le plus petit cercle DB, en sorte qu'ils accomplissent tous deux le tour entier en mesme temps.

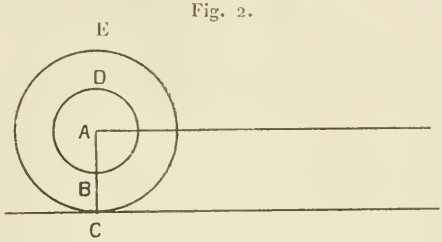
Lignes : 14. Après le mot *mouvemens*, l'ordre dans *G* est comme suit : *pour revenir à notre question, il s'engendre à mesure qu'ils sont différens*, — 15. pas de parenthèses. — 19. *G* aussy] *on.* — 21. *G* mesme] *seule.* — 22. *G* sert] *suffit.* — 30. *G* à] *et.*

---

(1) *Voir* ci-avant, p. 225, la Note 3.

Il appert que le point B de l'axe AC se meut plus lentement que le point C du mesme axe, parce que en mesme temps le point B parcourt un espace moindre que le point C. Car le point B parcourt en mesme temps la circonférence du cercle BD pendant que le

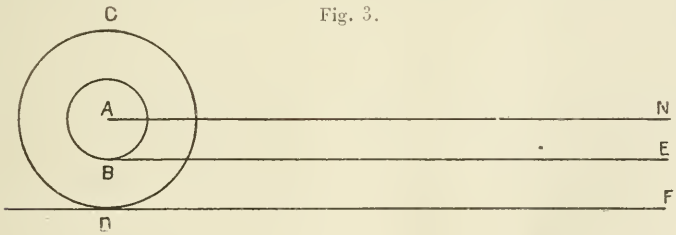
Fig. 2.



point C parcourt celle du cercle EC. Or, ces mouvements estant supposés uniformes, il y aura telle proportion de la vitesse du point C à celle du point B que de la circonférence du cercle EC à celle du cercle DB.

Supposons maintenant qu'en la figure suivante (*fig.* 3) le cercle DC fasse sa conversion entière sur la ligne DF, ie dis *qu'en mesme temps le cercle* AB *fera la conversion sur* BE, *esgale à* DF.

Fig. 3.



Car soit, par exemple, la vistesse du point D, meu circulairement, esgale à la vistesse du mouvement droit du centre A, en ce cas il appert que la ligne droite DF est esgale à la circonférence du cercle DC. Car puisque A sur AN est d'esgale vistesse au point D, meu circulairement, et qu'en mesme temps l'un descrit l'entière circonférence DC et l'autre la ligne droite AN, il est certain que la ligne droite AN sera esgale à ladite circonférence. Et par conséquent DF, esgale à AN, sera aussy esgale à ladite circonférence.

Lignes : 10. *G* sa] *la.* — 14. *G droite* omis. — 17-18. *F la ligne droite* omis.

Or que maintenant la circonférence BA soit, par exemple, soubsdouble de la circonférence DC, il est certain de ce qui a esté dit que le mouvement circulaire de B sera soubsdouble de celuy de D. Mais nous avons prouvé que le mouvement droit du point A est esgal à celuy du point B, meü circulairement (par le mouvement nous entendons icy la vistesse), donc la vistesse du point A, meü sur AN, sera double de la vistesse du point B, meü circulairement; et partant, en temps esgal ils parcourront des espaces en proportion double. Mais AN est esgale à la circonférence du cercle DC, donc AN est double de la circonférence du cercle AB, et, par conséquent, lorsque le point A sera en N, le point B ne fera qu'une conversion du cercle AB. Et partant, il se trouvera pour lors au point E.

En toute autre proportion, la mesme démonstration aura lieu.

Desinant igitur mirari et Aristoteles et ipsius interpretes cùm evidentissimâ demonstratione probaverimus veritatem propositionis illius vicesimæ quintæ eamque motui naturali à primis congruam et convenientem.

His delibatis tantùm [nam maiore speculatione indigent et multa inde theoremata pulcherrima deduci possunt, quæ fortasse alias, dum licebit per otium, proferimus (1)*] ad tuam quæstionem accedo, et ita lineam curvam, de quâ quæris, per puncta construo :*

En la figure suivante (2) (*fig. 1*) soit le cercle duquel le centre K et la ligne LF, sur laquelle roulant il achève sa conversion. Et supposons que tant le mouvement droit que le circulaire soient uniformes. Soit descrit le cercle, duquel le centre A, esgal à celuy du centre K,

Lignes : 9. *G* DC] *BC*. — 10. *G le double*. — 16. *F* demonstratione probaverimus] *probatione demonstraverimus*. — 17. *G* vicesimæ quintæ] 25e. — 19-21. Pas de parenthèses. — 22. *F* construo] *constructio*. — 24. *F* LF] *LS* comme dans la suite.

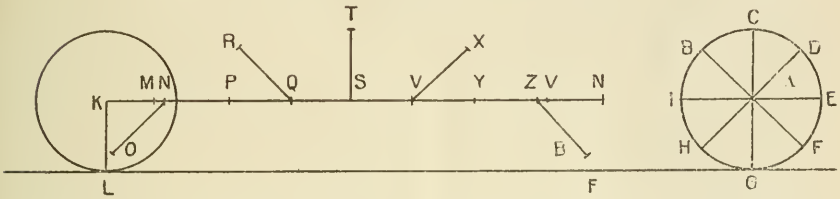
---

(1) Allusion, croyons-nous, à la théorie de la composition des mouvements, dont l'auteur tira sa célèbre méthode de la construction des tangentes.

(2) On trouve une figure et une construction semblable à la suivante dans le traité des *Observations sur la composition des mouvemens et sur le moien de trouver les touchantes des lignes courbes* que du Verdus a rédigé plus tard d'après les leçons de Roberval et qui a été publié dans les *Divers Ouvrages de math. et de phys.* (éd. de 1693, p. 105-106).

en sorte que la ligne LF continuée touche le cercle A au point G. Soient tirées les deux diamètres GC, JE à angles droits, et, *per continuam portionum circumferentiæ bisectionem*, soit divisée la circonférence en tant de parties esgales que vous voudrez (et plus il y en aura, la ligne se descrira plus précisément), mettons en 8,

Fig. 1.



par exemple, aux points G, H, J, B, C, D, E, F; et soient tirées ausdits points les diamètres. Du centre K soit tirée KN esgale et parallèle à LF, et soit divisée KN en autant de parties esgales que le cercle A par les points K, N, P, Q, S, V, Y, Z, N; du point K soit tirée KL esgale et parallèle à AG, du point N soit tirée NO esgale et parallèle à AH, du point P soit tirée PM *in directum* à AJ et qui luy soit esgale, du point Q soit tirée QR esgale et parallèle à AB, du point S soit tirée ST esgale et parallèle à AC, du point V soit tirée VX esgalle et parallèle à AD, du point Y soit tirée YV esgalle à AE *et ipsi in directum*, du point Z soit tirée ZB esgalle et parallèle à AF, enfin du point N, NF esgalle et parallèle à AG.

Je dis *que la ligne descrite par le point* L, *passera par les points* O, M, R, T, N, Y, B, *et se terminera en* F. Et cela, soit que la ligne LF soit esgale ou inesgale à la circonférence du cercle, de sorte que, si vous divisez le cercle A en beaucoup de parties, vous trouverés la description exactement (1).

Or, j'estime que vous n'avés pas veu que cette ligne se peut des-

Lignes : 6. *G points* omis. — 11-13. *G PM esgale et parallèle à AI, et QR esgale.* — 13. *G* du point S soit tirée] *et.* — 13-16. Au lieu de *du point V... AG, G* porte seulement : *etc.* — 16. *F N* omis. — 19-2 (à la page suivante). Le passage *de sorte que* jusqu'à *infinita* manque dans *G.*

(1) Il apparaît de ce passage, comme de ce qui suit, que Roberval avait étudié les roulettes allongées et raccourcies en même temps que la roulette ordinaire.

crire plus aisément que les sections coniques, c'est-à-dire *per puncta infinita*. Il sera facile de treuver la démonstration de ma construction si Vous y prenez garde; si Vous y treuvez de la difficulté, ie vous l'envoyeray.

Il paroist (et ie le vous démonstreray aussy) *que cette ligne n'est ny Ellipse ny pas une des lignes courbes que nous treuvons dans les livres; qu'au contraire elle a ses propriétés à part*, que ie décrirois toutes, sy i'avois assez de loisir.

Il paroist encor :

Qu'un point autre que L, *pris en la circonférence du cercle* LK, *descrira une portion de cette mesme ligne.*

Que sy vous prenez un autre point, plus proche du centre K *que le point* L, *il descrira une ligne différente de celle-cy, mais sa base sera esgale à celle de cette-cy;* bref : *toutes les lignes courbes descrites par les points entre* L *et* K, *seront toutes différentes, quoyque leurs bases soient esgales.*

On peut faire un mesme discours sur la sphère, de laquelle un grand cercle roule sur une ligne droite. Car tous les points généralement qu'on peut imaginer, ou dans la superfitie ou dans la solidité de la sphère, descriront des lignes courbes, dont les bases seront esgales; il n'y a que les points seuls de l'axe qui descriront des lignes droites, par les raisons que nous avons desia veües.

Au contraire, sy on imagine deux cercles inesgaux rouler et que le mouvement circulaire du grand soit à son mouvement droit en telle proportion que le mouvement circulaire du plus petit à son mouvement droit, en ce cas les lignes courbes que le grand et le petit cercle descriront, seront semblables entr'elles.

Et ainsy nous pouvons considérer ces nouvelles lignes ou comme semblables et esgales, ou comme semblables et inesgales, ou comme entièrement dissemblables. Ce que nous donneroit suiet de faire des volumes entiers sur ce suiet, sy nous avions du temps ou sy la matière en valoit la peine.

Lignes : 4. *G si vous y prenez garde* omis. — 6. Pas de parenthèses. — *F vous* omis. — 9. *G sy i'en avois le loisir.* — 13. *F* un] *VY* — 14-15. *F mais... cette cy* omis. — 16. *G d'entre.* — 16-17. après *K*, *F* poursuit : *descriront des lignes différentes, et dont pourtant les bases seront tousiours esgales.* — 25-27. *en telle proportion... droit* omis dans *F*. — 32. *G sur ce suiet* omis.

SUR LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. Le principe des travaux virtuels ou principe fondamental de la Statique analytique s'obtient en combinant le principe d'équilibre des forces données $\mathfrak{F}$ et des forces de liaison $\mathfrak{L}$ avec la propriété :

(*a*). *Les forces de liaison ont un travail nul pour tout déplacement virtuel sur la liaison* que l'on prend comme traduction mathématique de la notion de liaison réalisée sans frottement et dans laquelle il est bien entendu qu'il ne s'agit que de *réactions statiques*, de réactions exercées par des liaisons fixes sur des systèmes matériels immobiles en contact avec elles.

Le principe d'équilibre à chaque instant des forces données $\mathfrak{F}$, des forces d'inertie $\mathfrak{I}$ et des forces de liaison $\mathfrak{L}$, donné par Dalembert, fournira immédiatement, par le même raisonnement rigoureux, le principe fondamental de la Dynamique analytique si on le combine avec la propriété :

(*c*). *Les forces de liaison à un instant quelconque du mouvement ont un travail nul pour tout déplacement virtuel sur la liaison immobilisée à cet instant*, que nous attribuerons encore aux liaisons réalisées sans frottement et dans laquelle il est bien entendu qu'il s'agit de *réactions dynamiques*, de réactions exercées par des liaisons fixes ou variables sur le système en mouvement à leur contact.

2. Avant de continuer, il est bon de signaler à ce propos l'idée fausse, exprimée partout, que le principe de Dalembert ramène la Dynamique à une question de Statique, donc à l'application du principe des travaux virtuels.

Le principe des travaux virtuels, qui ne considère que des réactions statiques, ne s'applique évidemment pas ici où il est question de réactions dynamiques, à moins que l'on admette que les réactions dynamiques possèdent la propriété fondamentale des

réactions statiques, c'est-à-dire que l'on admette la propriété (c), et alors ce n'est pas une application du principe des travaux virtuels, mais simplement du raisonnement déjà employé pour démontrer ce principe.

Je n'insiste pas sur les artifices de langage employés parfois pour arriver à faire croire que la réaction dynamique est la réaction statique d'un certain équilibre fictif, ni sur l'inversion classique transformant « l'effet à l'instant t de la liaison » en « l'effet de la liaison à l'instant t » par laquelle certains auteurs se dispensent d'admettre la propriété (c) dans le cas général des liaisons dépendant du temps.

3. Après cette critique nécessaire nous devons nous demander si la propriété (c) est indispensable dans toute sa généralité pour baser la Mécanique analytique, d'autant plus que, dans le cas des liaisons dépendant du temps, elle n'apparaît avec aucun caractère mécanique, mais plutôt comme propriétés analytique admise dans le but d'arriver à une forme unique des équations du mouvement, que les liaisons dépendent ou non du temps.

Entre les deux propriété (a) et (c) nous introduirons une propriété intermédiaire (b) qui est le cas particulier de (c) relatif aux liaisons indépendantes du temps. Nous en déduirons immédiatement les équations du mouvement à liaisons indépendantes du temps et nous allons montrer que cela nous suffira pour passer au cas général des liaisons dépendant du temps.

Pour y arriver nous allons rejeter la notion analytique de liaison dépendant du temps, si simple donc si attrayante et la remplacer par la notion mécanique, obtenue par la considération des liaisons, certainement plus compliquée mais, par contre, bien plus féconde.

Il est d'expérience courante dans la pratique des machines que si à un système matériel Σ animé d'un mouvement M sous l'action de forces données Φ on accroche un autre système matériel S soumis à des forces données $\mathcal{F}$, au moyen de liaisons ordinaires, c'est-à-dire indépendantes du temps, le mouvement $\mathfrak{M}$ sera modifié et qu'il le sera d'autant moins que, S et les forces $\mathcal{F}$ restant les mêmes, le système Σ aura une masse plus considérable, étant naturellement soumis à des forces proportionnées. A la limite, quand la masse de Σ deviendra infinie, le mouvement $\mathfrak{M}$ ne sera plus

modifié du tout et le système S se trouvera relié par une liaison indépendante du temps à un système animé d'un mouvement donné à l'avance. Pour S nous aurons ainsi une liaison dépendant du temps.

4. Soient q_1, q_2 les paramètres absolus définissant le système S et $a_1, a_2, \ldots$ ceux qui définissent Σ. Nous allons supposer que toutes les masses de Σ ainsi que les forces qui agissent sur ce système contiennent en facteur un paramètre σ que nous ferons croître indéfiniment.

Il ne figure dans tout le système $S + \Sigma$ que des liaisons au sens actuel, c'est-à-dire indépendantes du temps et elles sont de trois sortes :

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_1(\delta q) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \alpha_1(\delta a) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \psi_1(\delta q) + \beta_1(\delta a) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

les a ne figurant pas dans les coefficients des premières et les q dans les coefficients des secondes. Les troisièmes sont les équations de la liaison de jonction.

L'équation de Dalembert du système $S + \Sigma$ s'écrira

$$\begin{aligned} \Sigma(P + Q)\,\delta q + \sigma\Sigma(P_1 + Q_1)\,\delta a + \Sigma\lambda\varphi(\delta q) \\ + \Sigma\mu\alpha(\delta a) + \Sigma\nu[\psi(\delta q) + \beta(\delta a)] = 0 \end{aligned}$$

et se décomposera en deux

$$\begin{aligned} &\Sigma(P + Q)\,\delta q + \Sigma\lambda\varphi(\delta q) + \Sigma\nu\psi(\delta q) = 0, \\ &\Sigma(P_1 + Q_1)\,\delta a + \Sigma\frac{\mu}{\sigma}\alpha(\delta a) + \frac{1}{\sigma}\Sigma\nu\beta(\delta a) = 0, \end{aligned}$$

qui, en considérant les $\frac{\mu}{\sigma}$ comme de nouvelles inconnues μ', deviennent, quand on fait croître indéfiniment σ,

$$\begin{aligned} &\Sigma(P + Q)\,\delta q + \Sigma\lambda\varphi(\delta q) + \Sigma\nu\psi(\delta q) = 0, \\ &\Sigma(P_1 + Q_1)\,\delta a + \Sigma\mu'\alpha(\delta a) = 0. \end{aligned}$$

Dans la seconde, où les q ne figurent pas, on reconnaît les équations du mouvement de Σ soumis aux forces Φ qui lui sont appliquées et à ses liaisons propres $\alpha_1, \ldots$. C'est le mouvement $\mathfrak{M}$ complètement indépendant de S et que, supposant ses équations intégrées une fois pour toutes, nous pouvons considérer comme

connu. En conséquence, les a seront des fonctions connues de t qu'on devra remplacer dans la première identité, c'est-à-dire dans les coefficients des $\psi(\delta q)$ puisque c'est là seulement qu'ils figurent, et alors nous reconnaissons l'équation de Dalembert du système S soumis aux forces $\mathcal{F}$ qui lui sont appliquées, à ses liaisons propres $\varphi_1, \ldots$ et aux liaisons $\psi_1, \ldots$ qui dépendent du temps par la présence des a.

La liaison $\psi + \beta$ entre S et Σ est, par hypothèse, indépendante du temps, donc son équation du premier ordre est homogène

$$\psi(q') + \beta(a') = 0,$$

t ne figurant pas dans les coefficients. Par remplacement des a elle prend la forme non homogène

$$\psi_1(q') + \Lambda = 0,$$

Λ et les coefficients de ψ_1 étant des fonctions des q et de t, car les a peuvent figurer dans les coefficients de ψ et les q dans ceux de β.

Supposons qu'à l'instant t on immobilise le système Σ, la liaison indépendante du temps entre S et Σ deviendra une liaison indépendante du temps à laquelle sera soumis S et qu'on obtiendra en immobilisant les a sur leurs valeurs actuelles et annulant les a', ce qui revient, dans la liaison considérée, à annuler Λ et à considérer t comme une constante dans les coefficients de ψ_1. Nous retrouvons le procédé bien connu de formation de la liaison immobilisée à l'instant t et nous voyons par les termes

$$\Sigma \nu \psi_1(\delta q)$$

que ce sont précisément les déplacements virtuels sur cette liaison immobilisée qui figurent dans l'équation du mouvement de S. Nous obtenons ainsi rigoureusement :

Les équations du mouvement d'un système à liaisons dépendant du temps s'obtiennent en écrivant que les forces données et les forces d'inertie ont, à chaque instant, un travail nul pour tout déplacement virtuel sur les liaisons immobilisées à cet instant; c'est-à-dire le principe fondamental de la Mécanique analytique pour le cas général des liaisons dépendant du temps.

Nous remarquerons que l'ordre est renversé, que nous obtenons en premier les équations du mouvement, ce qui nous suffit; que par interprétation nous en déduisons le principe général qui, à la rigueur, est inutile et apparaît alors comme moyen commode de se rappeler la formation des équations du mouvement; et qu'enfin, de ce principe, nous déduirons comme conséquence la propriété (c) des réactions dynamiques des liaisons dépendant du temps propriété qui est ainsi conséquente de (b) et qu'on n'a pas à utiliser.

Donc :

Le principe fondamental de la Mécanique analytique et les équations générales du mouvement à liaisons fixes ou dépendant du temps résultent uniquement de l'unique propriété (b) des réactions dynamiques des liaisons indépendantes du temps réalisées sans frottement.

5. Toute liaison dépendant du temps peut-elle être réalisée de la manière que nous venons de considérer?

La réponse est facile et affirmative. Considérons dans un plan horizontal fixe une molécule Σ de masse extrêmement considérable et lançons-la à partir de l'origine avec la vitesse $\sqrt{2}$ dans la direction de la bissectrice des axes, de façon qu'en désignant par a et b ses deux coordonnées elle prenne le mouvement rectiligne uniforme

$$a = t, \qquad b = t.$$

Pour réaliser une liaison de S dépendant du temps

$$f_1(q, t) = 0, \qquad \ldots,$$
$$A_1^1(q, t)q'_1 + \ldots + A_n^1(q, t)q'_n + B^1(q, t) = 0, \qquad \ldots,$$

il nous suffira de réaliser entre S et la molécule Σ la liaison indépendante du temps

$$f_1(q, a) = 0, \qquad \ldots,$$
$$A_1^1(q, a)q'_n + \ldots + A_n^1(q, a)q'_n - B^1(q, a)b' = 0, \qquad \ldots,$$

puisque, en vertu du mouvement de Σ, on doit remplacer a par t et b' par 1, ce qui redonne bien la liaison proposée entre les q.

6. Dans tout ce qui précède on a supposé essentiellement que

les q étaient des paramètres absolus, c'est-à-dire que les coordonnées d'une molécule quelconque du système étaient de la forme

$$x = f(q), \qquad y = \varphi(q), \qquad z = \psi(q),$$

le temps t n'y figurant pas explicitement; la force vive $2T$ est alors homogène aux q'.

Supposons qu'en utilisant certaines équations finies de la liaison on fasse un changement de paramètres.

$$(1) \qquad \begin{cases} f_h(q, t) = 0, & \ldots, \quad f_h(q, t) = 0, \\ f_{h+1}(q, t) = p_1, & \ldots, \quad f_n(q, t) = p_{n-h}. \end{cases}$$

Ces équations définiront les q fonctions des p et de t, puis les q' seront définis au moyen des p' par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = 0, & \ldots \quad \dfrac{df_h}{dt} = 0, \\ \dfrac{df_{h+1}}{dt} = p'_1, & \ldots \quad \dfrac{df_n}{dt} = p'_{n-h}. \end{cases}$$

Les x, y, z deviendront des fonctions des p et de t, et si nous donnons aux p des variations δp en laissant t constant, nous aurons, pour les molécules, des déplacements virtuels

$$\delta x = \sum \frac{\partial x}{\partial p}\,\delta p, \qquad \delta y = \sum \frac{\partial y}{\partial p}\,\delta p, \qquad \delta z = \sum \frac{\partial z}{\partial p}\,\delta p,$$

qu'on pourra écrire

$$\delta x = \sum \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta q, \qquad \delta y = \sum \frac{\partial y}{\partial q}\,\delta q, \qquad \delta z = \sum \frac{\partial z}{\partial q}\,\delta q,$$

les δq étant fournis par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \delta f_1 = 0, & \ldots, \quad \delta f_h = 0, \\ \delta f_{h+1} = \delta p_1, & \ldots \quad \delta f_n = \delta p_{n-h}, \end{cases}$$

qui sont les équations (1) différentiées en ne tenant pas compte du t explicite ou encore les équations (2) réduites à leurs parties homogènes avec remplacement des q', p' par les δq, δp.

Les déplacements virtuels définis par nos δp peuvent être définis par les δq correspondants et, pour qu'ils soient compatibles avec les liaisons immobilisées à l'instant t, il faut que ces δq satisfassent à des conditions (C) que nous savons former. Les condi-

tions (Γ) que devront remplir les δp seront donc les transformées des conditions (C) au moyen des formules (3).

Considérons une des liaisons exprimée par le changement de paramètres, la liaison

$$f_1(q, t) = 0$$

donnant comme condition (C)

$$\delta f = \sum \frac{\partial f_1}{\partial q} \delta q = 0.$$

C'est précisément la première équation (3) : donc transformée aux δp elle donnera une identité. Ces liaisons ne donnent aucune condition (Γ).

Prenons une liaison autre, elle sera du premier ordre, sinon nous la ramènerons au premier ordre par différentiation. Soit

$$\Sigma a q' + b = 0$$

donnant comme condition (C) d'après la règle indiquée précédemment (§ 5)

$$\Sigma a \delta q = 0.$$

Soit

$$\Sigma A p' + B = 0$$

la liaison transformée, on voit immédiatement que $\Sigma A p'$ est la transformée de $\Sigma a q'$ au moyen des formules des équations (2) réduites et cela nous montre que $\Sigma A \delta p$ est transformée de $\Sigma a \delta q$ par les formules (3).

La condition (Γ) ainsi obtenue

$$\Sigma A \delta p = 0 \tag{4}$$

se déduit de l'équation aux p' comme la condition (C) se déduisait de l'équation aux q'.

On est donc conduit aux formules

$$\delta x = \sum \frac{\partial x}{\partial p} \delta p, \qquad \delta y = \sum \frac{\partial y}{\partial p} \delta p, \qquad \delta z = \sum \frac{\partial z}{\partial p} \delta p, \tag{5}$$

les δp étant liés par les équations du premier ordre de la liaison réduites à l'homogénéité. C'est exactement comme dans le cas des paramètres absolus q; la seule différence existante est que la force vive avec les p, p' n'est pas homogène; mais comme cette homo-

généité n'intervient pas, le résultat reste le même, de sorte que :

Les équations de Lagrange s'appliquent sans aucune condition relative à la nature des paramètres employés.

Le fait que, *avec des paramètres quelconques*, les déplacements virtuels compatibles avec la liaison immobilisée sont donnés par les formules (5) et les équations (4) est toujours admis comme évident mécaniquement, alors qu'en réalité c'est un fait analytique qu'il était nécessaire de démontrer.

SUR LA RECHERCHE GÉNÉRALE DES FONCTIONS PRIMITIVES A n VARIABLES;

PAR M. MAURICE JANET.

1. Une dérivée d'une fonction u de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est caractérisée par un système de n entiers, positifs ou nuls, ses ordres partiels relativement à chacune des variables. Donnons-nous arbitrairement un certain nombre de systèmes de n entiers, (M), systèmes supposés tous différents; nous caractérisons ainsi un certain nombre de dérivées d'une fonction indéterminée u des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Chercher à déterminer la fonction u de manière que ces dérivées (M) soient des fonctions *données* des n variables indépendantes x_i, c'est, par définition, se proposer un problème de « *recherche de fonction primitive* », ou de « calcul inverse de dérivation ».

Nous donnerons ici un moyen *systématique* pour reconnaître si le problème est possible, et, dans le cas de possibilité, pour en trouver la solution générale [1]; cela sous certaines hypothèses

[1] C'est la question préliminaire qui se pose dans une théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette question a été traitée par M. Riquier (*Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, 1910) et par nous-même [*Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*Journal de Mathématiques*, 1920)], lorsque les fonctions données sont *analytiques* et lorsqu'on se borne *a priori* aux solutions *analytiques*.

générales relativement à l'existence et à la continuité des dérivées de la fonction inconnue. Mais nous nous proposerons tout d'abord une autre question, qui, ainsi que nous le verrons, est plus générale que la précédente. Cette question nous conduira à une infinité de manières d'écrire *systématiquement* pour une fonction de n variables une formule de Taylor limitée analogue à celle qui s'écrit, pour une fonction d'une variable,

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(\xi)\, d\xi.$$

2. Au lieu de considérer les systèmes d'entiers [1] qui caractérisent les dérivées, il est commode de considérer les monômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui ont respectivement ces entiers pour exposants [2]. Étant donné un système de monômes (M), tous différents, nous attacherons à chacun d'eux un certain nombre des variables x_i, qui seront appelées *ses variables multiplicatrices* dans (M), par la règle suivante :

x_n sera regardée comme variable multiplicatrice pour ceux des (M) (et pour ceux-là seulement) dont le degré en x_n est égal au maximum des degrés en x_n des (M). Pour reconnaître si $x_i (i \neq n)$ est variable multiplicatrice pour

$$\overline{M} = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_i^{\alpha_i} \ldots x_1^{\alpha_1},$$

on considérera tous ceux des M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ ont respectivement les degrés $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}$: le degré en x_i de ces monômes aura un maximum; x_i sera (ou non) multiplicatrice pour $\overline{M}$ suivant que α_i sera (ou non) égal à ce maximum.

Cette définition étant posée, à chacun des monômes (M) correspond une répartition des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en deux groupes $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}$; $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k}$ $(h + k = n)$, les

---

(1) La théorie des systèmes de monômes, variables multiplicatrices, systèmes complets a été développée à un autre point de vue dans le Mémoire mentionné ci-dessus; nous ne développons ici que les résultats qui n'y avaient pas trouvé place.

(2) Un monôme en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est donc dans tout ce qui suit une expression de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, où les α sont des entiers positifs ou nuls.

variables multiplicatrices (x_a) et les variables non multiplicatrices (x_b) du monôme considéré; l'un ou l'autre de ces groupes peut d'ailleurs disparaître complètement; en particulier, pour l'un des monômes, *le plus haut* [1], toutes les variables sont multiplicatrices.

Les (M) étant donnés, nous allons maintenant définir des monômes (N) en nombre fini, que nous appellerons *monômes complémentaires* des (M), ainsi que des *variables multiplicatrices* pour ces (N).

Considérons les exposants de x_n dans les (M). Soit β un entier (positif ou nul) qui ne figure pas parmi ces nombres et soit inférieur au plus grand. Les monômes x_n^β constitueront les $N^{(n)}$. Les variables multiplicatrices seront pour chacun d'eux $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Soit i un des indices $1, 2, \ldots, n-1$. Considérons un des systèmes d'exposants de $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ qui apparaissent dans les (M), $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}$; considérons tous ceux des (M) pour lesquels $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ ont respectivement les degrés $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$; dans ces monômes, $(M)_{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{i+1}}$, considérons l'ensemble des exposants de x_i; soit β un entier (positif ou nul) qui ne figure pas parmi ces nombres et soit inférieur au plus grand: $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} x_i^\beta$ est par définition un monôme $N^{(i)}$; ses variables multiplicatrices sont, par définition: 1° $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$; 2° toutes celles des variables $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ qui sont multiplicatrices pour un $(M)_{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{i+1}}$ dans le système (M).

L'ensemble de tous les monômes $N^{(n)}, N^{(n-1)}, \ldots, N^{(1)}$, évidemment en nombre fini, constituera le système (N) complémentaire du système (M).

Ces définitions étant posées, nous nous proposerons d'assujettir *chacune* des dérivées (M), (N) de la fonction indéterminée u à se réduire, lorsque *ses* variables *non multiplicatrices* se réduisent toutes *à zéro*, à une fonction donnée arbitraire, continue, de ses *variables multiplicatrices. Le problème général ainsi posé a une solution et une seule.*

---

[1]) $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ est dit *plus haut* ou *plus bas* que $x_n^{\alpha'_n} x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha'_1}$ suivant que la première des différences $\alpha_n - \alpha'_n, \alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}, \ldots, \alpha_1 - \alpha'_1$ qui ne s'annule pas est *positive* ou *négative*.

3. Lorsqu'il n'y a qu'une variable indépendante x, le problème précédent se réduit simplement à déterminer une fonction de x, u, dont les dérivées [1] d'ordre 0, 1, 2, ..., $p-1$ se réduisent pour $x=0$ à des constantes données C_0, C_1, ..., C_{p-1} et dont la dérivée d'ordre p soit une fonction donnée (continue) $\varphi(x)$. L'unique solution est donnée, comme on sait, par la formule

$$u(x) = C_0 + \frac{x}{1} C_1 + \frac{x^2}{1.2} C_2 + \ldots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} C_{p-1} + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi(\xi) d\xi.$$

Il sera commode d'écrire aussi cette formule d'une manière un peu différente, qui semblera au premier abord inutilement compliquée.

Soit $\varphi_\lambda(x)$ la fonction à laquelle nous cherchons à réduire, dans certaines circonstances, la dérivée caractérisée par le monôme x^λ; $\varphi_\lambda(x)$ est en fait une constante lorsque $\lambda < p$; quoi qu'il en soit nous pourrons écrire

$$u = \varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^x \frac{(x-\xi)}{1} \varphi_2(\xi) d\xi + \ldots$$
$$+ \int_0^x \frac{(x-\xi)^{p-2}}{(p-2)!} \varphi_{p-1}(\xi) d\xi + \int_0^x \frac{(x-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi_p(\xi) d\xi,$$

u se présente alors comme une somme de termes correspondant respectivement aux diverses valeurs de l'indice λ et dont la formation est différente suivant que λ est *nul* ou *différent* de zéro.

4. Revenons aux monômes donnés (M) et aux monômes (N) que l'on en a déduits. Considérons l'un des monômes (M) ou (N); soient x_{c_1}, x_{c_2}, ..., x_{c_l} celles des variables x_i qui y figurent effectivement, ou, autrement dit, dont l'exposant y est différent de zéro, et soient x_{d_1}, x_{d_2}, ..., x_{d_m} toutes les autres ($l+m=n$). Désignons d'une manière générale par $f(x_{c_1}, x_{c_2}, \ldots, x_{c_l}, x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_m})$ la fonction à laquelle doit se réduire la dérivée correspondant au monôme considéré quand on y annule toutes les variables non multiplicatrices (f ne contient d'ailleurs pas effectivement toutes les variables, sauf s'il s'agit du monôme M le plus haut).

---

[1] Il est commode d'entendre par dérivée d'ordre zéro la fonction elle-même.

On fera correspondre au monôme considéré l'intégrale l-uple

$$\int_0^{x_{c_1}} \frac{(x_{c_1}-\xi_{c_1})^{\alpha_{c_1}-1}}{(\alpha_{c_1}-1)!}\,d\xi_{c_1} \int_0^{x_{c_2}} \frac{(x_{c_2}-\xi_{c_2})^{\alpha_{c_2}-1}}{(\alpha_{c_2}-1)!}\,d\xi_{c_2}\ldots$$
$$\int_0^{x_{c_l}} \frac{(x_{c_l}-\xi_{c_l})}{(\alpha_{c_l}-1)!} f(\xi_{c_1}, \xi_{c_2}, \ldots, \xi_{c_l}, x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_m})\,d\xi_{c_l}.$$

On fera d'ailleurs correspondre à celui des (M) ou (N) qui est d'ordre o par rapport à toutes les variables (monôme unité) la fonction même que l'énoncé du problème lui fait correspondre.

En faisant la somme de tous les termes ainsi obtenus, on obtient une solution du problème proposé; et c'est la seule.

5. La remarque faite au n° 3 montre qu'il en est bien ainsi dans le cas d'*une* variable indépendante. Nous admettrons ce fait dans le cas de $n-1$ variables et nous le démontrerons pour n.

Désignons ceux des (M) ou (N) qui contiennent x_n à l'exposant λ par (M_λ) ou (N_λ) et leurs quotients par x_n^λ par (M'_λ) ou (N'_λ). Si l'on se donne *le système* de monômes à $n-1$ *variables* (M_λ), leurs variables multiplicatrices respectives sont précisément les variables multiplicatrices des monômes (M_λ) correspondants dans le système (M) [à l'exception toutefois de x_n si λ a la valeur maxima a des exposants de x_n dans (M)]. Les monômes complémentaires des (M'_λ) sont précisément les (N_λ), et les variables multiplicatrices de ces (N_λ) sont précisément celles des monômes (N_λ) correspondants dans le système primitif à n variables (à l'exception de x_n si λ a la valeur a).

Il résulte immédiatement de ces remarques et du fait admis dans le cas de $n-1$ variables que l'on peut écrire conformément aux indications du n° 4 les expressions de u, $\frac{\partial u}{\partial x_n}$, ..., $\frac{\partial^{a-1} u}{\partial x_n^{a-1}}$ lorsque $x_n = 0$ et l'expression de $\frac{\partial^a u}{\partial x_n^a}$ quel que soit x_n. Nous écrirons ces diverses expressions

$$\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad \ldots\quad \varphi_{a-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\varphi_a(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

bien que les premières $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{a-1}$ ne contiennent pas effectivement x_n.

D'après la remarque faite pour le cas de 1 variable, la solution

unique du problème sera alors donnée par l'expression

$$\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=a} \int_0^{x_n} \frac{(x_n - \xi_n)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) d\xi_n,$$

ce qui suffit à montrer que l'expression de u se trouve donnée dans le cas de n variables par la règle énoncée au n° 4.

6. *Exemple.*

			Variables multiplicatrices.
Monômes (M) donnés		$x_3^3 x_2 x_1^2$,	x_3, x_2, x_1
		$x_3^3 x_2^2$	x_2, x_1
(N)	$N^{(3)}$	$1, x_3, x_3^2, x_3^4$,	x_2, x_1
	$N^{(2)}$	$x_3^3, x_3^3 x_2, x_3^3 x_2^2$,	x_1
		x_3^3,	x_3, x_1
	$N^{(1)}$	$x_3^3 x_2, x_3^3 x_2 x_1$.	x_3, x_2

La formule limitée de Mac Laurin correspondant au système donné $(x_3^3 x_2 x_1^2, x_3^3 x_2^3)$ sera donc, en posant $p_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} u}{\partial x_1^\lambda \partial x_2^\mu \partial x_3^\mu}$, en écrivant les termes dans l'ordre où ils apparaissent au Tableau précédent, et en supprimant tous les signes d'intégration superflus :

$$\begin{aligned}
&u(x_1, x_2, x_3) \\
&= \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \xi_1)}{1} d\xi_1 \int_0^{x_2} d\xi_2 \int_0^{x_3} \frac{(x_3 - \xi_3)^4}{1.2.3.4} p_{215}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 \\
&\quad + \frac{x_3^3}{1.2.3} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{1.2} p_{033}(x_1, \xi_2, 0) d\xi_2 \\
&\quad + p_{000}(x_1, x_2, 0) + \frac{x_3}{1} p_{001}(x_1, x_2, 0) \\
&\quad + \frac{x_3^2}{1.2} p_{002}(x_1, x_2, 0) + \frac{x_3^4}{1.2.3.4} p_{004}(x_1, x_2, 0) \\
&\quad + \frac{x_3^3}{1.2.3} \left[p_{003}(x_1, 0, 0) + \frac{x_2}{1} p_{013}(x_1, 0, 0) + \frac{x_2^2}{1.2} p_{023}(x_1, 0, 0) \right] \\
&\quad + \int_0^{x_3} \frac{(x_3 - \xi_3)^4}{1.2.3.4} p_{005}(x_1, 0, \xi_3) d\xi_3 \\
&\quad + \int_0^{x_2} d\xi_2 \int_0^{x_3} \frac{(x_3 - \xi_3)^4}{1.2.3.4} p_{015}(0, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 \\
&\quad + \frac{x_1}{1} \int_0^{x_2} d\xi_2 \int_0^{x_3} \frac{(x_3 - \xi_3)^4}{1.2.3.4} p_{115}(0, \xi_2, \xi_3) d\xi_3.
\end{aligned}$$

Cette formule ne suppose que l'existence et la continuité des dérivées qui y entrent.

7. *Systèmes complets.* — Considérons un système de monômes (M) tel que *chacun* des produits que l'on peut former avec l'un d'eux M et l'une des variables *non multiplicatrices* de $\overline{M}$ soit identique à un M ou au produit d'un M par un certain nombre de ses variables multiplicatrices. Un tel système sera dit *complet*.

On démontre aisément que le monôme M qui s'introduit dans la deuxième partie de cet énoncé est plus *haut* que le monôme M d'où l'on part [1].

Proposons-nous de déterminer une fonction u telle que celles de ses dérivées qui sont caractérisées par les monômes (M) d'un système complet donné soient des fonctions données des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous apercevons immédiatement certaines conditions de possibilité du problème : à chacune des identités $\overline{M}.x_i = M.x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ que mentionne la définition précédente correspond une relation entre les fonctions auxquelles on cherche à égaler les dérivées correspondant aux (M) :

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad [\textit{conditions } (1)]$$

(si du moins on suppose la continuité des dérivées de u que fait intervenir l'égalité précédente).

Supposons que *ces conditions* (1) *soient réalisées*. Si le problème posé a une solution, cette solution vérifie bien évidemment, en particulier, les équations obtenues en annulant dans chacune des équations proposées les variables non multiplicatrices du premier membre. *Réciproquement*, considérons une solution des *équations ainsi obtenues*, je dis qu'elle est solution *des équations proposées*. La solution considérée vérifie évidemment *la plus haute* des équations proposées (*voir* n° 2) ; admettons qu'elle vérifie les k plus hautes et montrons qu'elle vérifie la $k+1^{\text{ième}}$ (comptée « en partant du haut ») ; désignons d'une manière générale par $M_\lambda = f_\lambda$ la $\lambda^{\text{ième}}$ à partir du haut ; on a identiquement,

---

[1] *Voir note* du numéro ci-dessus et *Journ. de Math.*, 1920. Chap. I. n° 10.

en désignant par x_i une variable non multiplicatrice [1] de M_{k+1},

$$\frac{\partial(M_{k+1}-f_{k+1})}{\partial x_i}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}(M_\mu-f_\mu)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

où $\mu=k$; mais $M_\mu-f_\mu$ est nul quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$; donc $M_{k+1}-f_{k+1}$ est indépendante des variables non multiplicatrices de M_{k+1}; comme cette quantité est nulle dès que ces variables non multiplicatrices le sont, elle est nulle quelles que soient x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Le problème que nous nous sommes posé conduit donc, lorsque les conditions de possibilité (I) sont réalisées, précisément au problème traité dans les numéros précédents, les dérivées (M) prenant ici des valeurs données qui viennent d'être précisées, et les dérivées (N) des valeurs arbitraires, respectivement sur les multiplicités correspondant à chacune d'entre elles.

8. Il suffit maintenant pour ramener le problème général posé au n° 1 au problème qui vient d'être traité au n° 7 d'adjoindre aux équations données un certain nombre de celles qu'on en déduit par dérivations, de manière à obtenir dans les premiers membres un système complet.

Pour adjoindre à des monômes donnés certains de leurs multiples de manière à obtenir un système complet, on pourra procéder de la façon suivante : on adjoindra tous les monômes nouveaux que l'on peut déduire des monômes donnés en utilisant seulement x_n comme variable de multiplication et en s'arrangeant pour que le degré de x_n dans les monômes obtenus ne dépasse pas le degré maximum de x_n dans les monômes donnés. Puis on considérera dans le système obtenu les monômes (M_λ) contenant x_n à un exposant déterminé λ et leurs quotients (M'_λ) par x_n^λ; chacun des systèmes (M'_λ) à $n-1$ variables ainsi obtenus sera traité comme on a traité le système à n variables donnés, et l'on « poursuivra l'application de ce procédé ». D'une manière plus précise, considérons *un système de monômes* (R), *en nombre fini, tel que chacun des produits obtenus en multipliant l'un d'eux par*

---

[1] Il est évidemment indifférent de confondre dans le langage la dérivée et le monôme correspondant.

l'une de celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ *qui ne sont pas multiplicatrices pour lui appartienne au système* (R); considérons tous ceux des monômes (R) qui contiennent $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ à des degrés déterminés $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}$, et divisons ces monômes $R_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ par $x_n^{\alpha_n}x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\ldots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$. Multiplions par x_i chacun des monômes $R'_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ en $x_i, x_{i-1}, \ldots, x_1$ ainsi obtenus, autant de fois que nous pourrons de manière toutefois que le degré de x_i dans le monôme obtenu ne dépasse pas le degré maximum en x_i des $R'_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$.

Soient :

$S'_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ les monômes ainsi obtenus (où sont compris évidemment les $R'_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$),

$S_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ les produits de ces monômes par $x_n^{\alpha_n}x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\ldots x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$,

S le système total des $S_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$.

Je dis que *chacun des produits obtenus en multipliant l'un des* S *par l'une de celles des variables* $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}, x_i$ *qui ne sont pas multiplicatrices pour lui appartient à* (S). C'est là un fait évident en ce qui concerne la variable x_i. Remarquons d'autre part que celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ qui ne sont pas multiplicatrices pour un $S_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ dans (S) sont précisément celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ qui ne sont pas multiplicatrices pour un $R_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ dans (R). Le produit P d'un $S_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ par une de celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ qui ne sont pas multiplicatrices pour lui dans (S) est donc égal (à un facteur près, puissance de x_i) au produit d'un $R_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$ par une de celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ qui ne sont pas multiplicatrices pour lui dans (R) : ce dernier produit est par hypothèse un R : c'est d'ailleurs un $R_{\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_{i+1}}$ où $\beta_n, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_{i+1}$ sont respectivement $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}$, *sauf l'un d'entre eux* qui est égal au nombre α correspondant augmenté d'une unité. Or l'exposant de x_i dans P est au plus égal à l'exposant maximum de x_i dans les $R_{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_{i+1}}$, et par suite à l'exposant maximum de x_i dans les $R_{\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_{i+1}}$. On peut donc affirmer que P est un monôme $S_{\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_{i+1}}$.

On appliquera au système (S) le procédé appliqué au système (R). En répétant cette opération un nombre suffisant de fois, on voit que l'on obtiendra un système complet. Le système

obtenu (T) aura même la propriété suivante : le produit de tout monôme T par une variable non multiplicatrice est un monôme (T).

Le système (T) obtenu, il pourra se faire d'ailleurs qu'on aperçoive un système plus simple que (T) qui possède les deux propriétés de comprendre les monômes (M) donnés et d'être complet.

On peut aussi opérer de la manière suivante : on adjoint aux M chacun des produits obtenus en multipliant un M par une de ses variables non multiplicatrices; soit $(M)^{(2)}$ le système total de monômes distincts ainsi obtenu; on opère sur $(M)^{(2)}$ comme on a opéré sur (M); et ainsi de suite. La suite des opérations ainsi définies se termine nécessairement [1] et aboutit à un système complet.

9. *Exemple.* — L'application de la première méthode conduit à adjoindre au système donné : $(x_3^2 x_2 x_1^2,\ x_3^3 x_2^3)$, tout d'abord, les monômes $x_3^4 x_2^3$, $x_3^5 x_2^3$, puis $x_3^5 x_2^2 x_1^2$, $x_3^5 x_2^3 x_1^2$; et enfin $x_3^5 x_2^3 x_1$.

Mais on aperçoit alors un système complet plus simple renfermant les deux monômes donnés. Il suffit d'omettre les deux monômes $x_3^5 x_2^3 x_1$, $x_3^5 x_2^3 x_1^2$. On sera amené à considérer le système suivant, pour les monômes duquel nous indiquons les variables multiplicatrices

$$
(\mathrm{T})\qquad
\begin{array}{ll}
x_3^2 x_2^3 & x_3,\ x_2,\ x_1, \\
x_3^3 x_2^2 x_1^2, & x_3,\quad x_1, \\
x_3^3 x_2 x_1^2, & x_3,\quad x_1, \\
x_3^4 x_2^3, & x_2,\ x_1, \\
x_3^3 x_2^3, & x_2,\ x_1.
\end{array}
$$

Considérons le système de deux équations

$$
\begin{aligned}
p_{215} &= f(x_1, x_2, x_3), \\
p_{033} &= g(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}
$$

où f et g sont des fonctions données.

On est amené à écrire le système :

$$
p_{035} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}, \qquad p_{225} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad p_{215} = f, \qquad p_{037} = \frac{\partial g}{\partial x_3}, \qquad p_{033} = g.
$$

Les conditions de possibilité (I) se réduisent, comme on pou-

---

[1] Voir *Journ. de Math.*, 1920, Chap. I, n° 9.

vait le prévoir, à la suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^6 g}{\partial x_3^2\, \partial x_1^2}.$$

La solution générale sera donnée par une formule analogue à celle que nous avons écrite complètement au n° 6 :

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2, x_3) = & \int_0^{x_2} \frac{(x_2-\xi_2)}{1.2}\, d\xi_2 \int_0^{x_3} \frac{(x_3-\xi_3)^4}{1.2.3.4} \frac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}(x_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_3 \\
& - \frac{x_2^2}{1.2} \int_0^{x_1} \frac{(x_1-\xi_1)}{1}\, d\xi_1 \int_0^{x_3} \frac{(x_3-\xi_3)^4}{1.2.3.4} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1, 0, \xi_3)\, d\xi_3 \\
& + \frac{x_2}{1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1-\xi_1)}{1}\, d\xi_1 \int_0^{x_3} \frac{(x_3-\xi_3)^4}{1.2.3.4} f(\xi_1, 0, \xi_3)\, d\xi_3 \\
& - \frac{x_3^4}{1.2.3.4} \int_0^{x_2} \frac{(x_2-\xi_2)^2}{1.2} \frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1, \xi_2, 0)\, d\xi_2 \\
& + \frac{x_3^3}{1.2.3} \int_0^{x_2} \frac{(x_2-\xi_2)^2}{1.2} g(x_1, \xi_2, 0)\, d\xi_2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les termes omis s'écriront aisément lorsqu'on aura formé *les monômes complémentaires* (T′) du système (T) : on sera amené à introduire trois fonctions arbitraires des deux variables x_1, x_2; une fonction arbitraire de (x_1, x_3), six fonctions arbitraires de x_1, quatre fonctions arbitraires de x_3.

Sans indiquer les conditions les plus larges dans lesquelles une telle formule reste valable, remarquons seulement que si l'on se borne aux fonctions u continues *ainsi que leurs dérivées jusqu'au dixième ordre inclusivement*, *il suffit* de supposer que toute fonction à laquelle on égale une dérivée (T) ou (T′) d'ordre α est continue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $10 - \alpha$ inclusivement.

1ère Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JEANS (J.-H.). — PROBLEMS OF COSMOGONY AND STELLAR DYNAMICS. Un vol. in-8°, VII + 293 pages, 15 figures, 5 planches hors texte. Cambridge, at the University Press, 1919.

« Etant donnée une masse fluide en rotation, et dont les éléments s'attirent suivant la loi de Newton, étudier la succession de ses configurations d'équilibre, et discuter la stabilité de ces formes » : tel était le sujet proposé pour 1917 par la Commission du Prix Adams. Orienté vers le problème par ses belles recherches sur la théorie cinétique des gaz, M. Jeans adressa un Mémoire qui fut couronné par l'Université de Cambridge. C'est ce Mémoire, amplifié par de nouveaux résultats, et complété par un résumé des travaux de Poincaré et de Darwin, que M. Jeans vient de publier sous forme d'Ouvrage didactique.

En pareille matière, un tel mot paraîtra sans doute bien osé ! Et pourtant quel a été le but de l'auteur ? Utiliser toutes les ressources de l'Analyse mathématique pour édifier une cosmogonie compatible avec les propriétés physiques de la matière, avec les lois générales de la Dynamique, et avec l'ensemble des observations astronomiques. Or, d'après M. Jeans, les deux premières conditions auraient été trop souvent méconnues; en général, les théories cosmogoniques ont eu pour origine une découverte astronomique sensationnelle, comme celles de l'anneau de Saturne ou des nébuleuses spirales; trop sujettes à l'influence de la mode, elles ne respecteraient pas assez les principes de la Mécanique.

Au contraire, selon M. Jeans, la véritable méthode doit être à la fois rationnelle et expérimentale : considérant un système matériel soumis à des forces données, et placé dans des conditions déterminées, l'astronome devra poursuivre son étude analytique aussi loin que possible; à défaut d'une solution complète, il s'efforcera de déterminer les différents modèles d'univers qui paraissent répondre à la question; et c'est alors qu'il recherchera si les types

ainsi délimités se trouvent réalisés ou non dans la Nature. Sans doute, la brièveté de notre histoire scientifique nous empêche de suivre l'évolution d'un monde; néanmoins, nous pouvons la reconstituer grâce à la richesse du musée céleste qui nous montre des systèmes cosmiques, de types analogues, à diverses étapes de leur existence.

On pourrait objecter à M. Jeans que nos connaissances sur la matière résultent d'expériences terrestres, et que les lois du mouvement proviennent de l'étude du système solaire. Par une accumulation incessante d'observations stellaires pourrons-nous échapper à cette sorte d'anthropomorphisme? Question oiseuse pour l'instant, alors que la solution rigoureuse des problèmes est encore si éloignée, et que le champ reste si largement ouvert aux hypothèses!

Arrivons aux problèmes abordés par M. Jeans. On peut les répartir en deux grandes catégories, suivant que les systèmes sont supposés incompressibles ou non. Nous nous attarderons un peu plus sur la première catégorie, pour laquelle l'auteur a obtenu d'importants résultats analytiques.

Or, au sujet d'une masse homogène, incompressible, on peut se poser trois types de problèmes. Tout d'abord, on peut étudier une masse liquide, tournant librement, et soumise uniquement aux attractions newtoniennes qui s'exercent entre ses éléments : c'est la question classique soulevée par l'évolution planétaire. En second lieu, on envisagera une masse dépourvue de rotation, mais brassée par des marées provoquées par le voisinage d'un autre corps céleste : c'est ainsi que Darwin, puis, plus récemment, Chamberlain et Moulton, ont expliqué la formation des planètes. Enfin, le troisième problème, celui des étoiles doubles, est une synthèse des deux premiers; il se rapporte à deux astres tournant et réagissant l'un sur l'autre.

Avant d'attaquer ces questions, M. Jeans commence par rappeler des théorèmes généraux de la Dynamique (Chap. II), et, particulièrement, l'étude de la stabilité d'après Poincaré. Signalons à cet égard l'emploi d'une représentation graphique fort heureuse qui illustre la théorie des figures de bifurcation (n°s 19-21), ainsi qu'une définition très nette de l'instabilité séculaire au sens de Tait et Thomson (n° 28). L'auteur arrive ensuite (Chap. III) aux séries linéaires des sphéroïdes de Mac Laurin et des ellipsoïdes

de Jacobi, puis aux séries analogues du problème des marées (le potentiel perturbateur étant limité au terme du second ordre $P_2[\cos\theta]$). A leur tour, les deux problèmes précédents sont des cas particuliers de cette forme du troisième problème que l'on obtient en considérant l'un des astres comme une sphère rigide (n° 51). L'auteur matérialise ce rapprochement par un ingénieux graphique (p. 50); puis, il étudie la stabilité des configurations précédentes dans l'hypothèse où les masses sont assujetties à conserver leurs formes ellipsoïdales.

Mais on peut encore traiter le problème des étoiles doubles en supposant que chacun des astres est déformable, tout en étant astreint à rester ellipsoïdal : c'est l'hypothèse de Darwin dont l'auteur reproduit l'analyse (n° 60), notamment en ce qui concerne la stabilité (n°s 64, 65).

Or ici se pose une question d'importance capitale. Que dire de la stabilité lorsque les milieux envisagés peuvent s'écarter de la forme ellipsoïdale? Résumons rapidement la méthode remarquable par laquelle M. Jeans a résolu ce problème difficile.

Posons

$$f = \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1,$$

$$\psi(\lambda) = -\pi\rho abc[(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-\frac{1}{2}},$$

et soit F une fonction de x, y, z et λ. On pourra définir la surface-limite d'un milieu par le système $f = 0 = F$. S'inspirant alors de la forme classique du potentiel de l'ellipsoïde, M. Jeans se propose de choisir la fonction F de telle sorte que le potentiel du milieu envisagé soit de la forme

$$V_{\text{ext.}} = \int_\lambda^\infty \psi(\lambda) F\, d\lambda, \qquad V_{\text{int.}} = \int_\lambda^\infty \psi(\lambda) F\, d\lambda.$$

Or, comme il le montre, on peut répondre à la condition précédente en écrivant

$$\begin{aligned} F = f &+ e\left[P - \frac{1}{4} f DP\right] \\ &+ e^2\left[Q - \frac{1}{8} DP^2 + f\left(\frac{1}{64} D^2P^2 - \frac{1}{4} DQ\right)\right. \\ &\qquad \left. + f^2\left(-\frac{1}{1536} D^3P^2 - \frac{1}{64} \quad Q\right)\right] + \ldots; \end{aligned}$$

P, Q — et, plus loin, R — sont des polynomes en

$$\xi = \frac{x}{a^2+\lambda}, \qquad \eta = \frac{y}{b^2+\lambda}, \qquad \zeta = \frac{z}{c^2+\lambda},$$

D désigne le symbole

$$\frac{\lambda}{a^2(a^2+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\lambda}{b^2(b^2+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\lambda}{c^2(c^2+\lambda)}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2};$$

enfin, pour $\lambda = 0$, on a

$$F = f + eP_0 + e^2Q_0 + e^3R_0 + \ldots, \qquad P_0, \qquad Q_0, \qquad R_0, \ldots,$$

pouvant être choisis arbitrairement. Il paraît donc possible de représenter par cette voie une distorsion quelconque de l'ellipsoïde fondamental (n° 76). A vrai dire, ce dernier point nous paraît mériter de nouvelles recherches; nous en dirons tout autant de la convergence des développements précédents.

Revenons maintenant au problème des étoiles doubles (Chap. V); on trouve aisément (n° 79) que P_0 doit être un polynome harmonique sphérique, et l'on est ainsi ramené aux résultats publiés par H. Poincaré dans les *Acta;* de plus, on voit sans peine qu'après avoir dépassé les premiers points de bifurcation de chaque problème, on est conduit à des ellipsoïdes instables pour des déformations non ellipsoïdales (n° 88). Mais il reste à étudier la stabilité des piroïdes.

Que donne la méthode de M. Jeans? Si l'on se limite aux termes en e^2, l'introduction du développement suivant les puissances de e entraînera l'existence d'une identité de la forme

$$\begin{aligned} V_b &+ \frac{1}{2}(\omega^2 + e^2\delta\omega^2)(x^2+y^2) \\ &= -\pi abc\theta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + eP_0 + e^2Q_0\right), \end{aligned}$$

où le potentiel V_b (que nous savons calculer) est du quatrième degré en x, y, z; or l'équation précédente fournit une double infinité de positions d'équilibre, dépendant des infiniment petits e et $\zeta = \frac{\delta\omega^2}{2\pi\rho}e^2$ (n°s 91-93). Mais, si l'on pousse le développement jusqu'aux termes en e^3 (ce qui entraîne de longs calculs), la détermination de trois coefficients du polynome R_0 conduit à

un système linéaire qui ne peut être compatible que pour $\zeta = 0,0074e^2$ (n° 99). Les figures piriformes ne peuvent donc dépendre que de e^2. Ceci posé, on obtient aisément pour leur moment d'inertie relatif à l'axe de révolution l'expression $Mk_0^2(1 - 0,0938e^2)$, et l'on déduit aussitôt de là que le moment cinétique autour du même axe est de la forme $M_0(1 - 0,0676e^2)$: c'est une fonction décroissante de l'infiniment petit e^2, résultat qui suffit à établir l'instabilité du piroïde (n° 102).

Au fond, d'après M. Jeans, Darwin aurait été induit en erreur par l'illusion que, dans le voisinage du jacobien critique, il ne pouvait exister qu'une seule configuration d'équibre; c'est ce qui l'aurait amené à introduire une condition d'équilibre étrangère au problème, d'où résultait l'équation erronée $\zeta = -0,015988e^2$.

En définitive, la controverse entre Liapounoff et Darwin est donc réglée au profit du géomètre russe, résultat qui, d'ailleurs, a été confirmé récemment et d'une manière indépendante par les intéressantes recherches de M. Pierre Humbert.

Théoriquement, la méthode de M. Jeans s'étend aux surfaces piriformes de rangs plus élevés; mais la complication des calculs rendrait les vérifications inextricables. Aussi l'auteur abandonne-t-il cette voie pour traiter le même problème dans l'espace à deux dimensions; les calculs sont alors singulièrement plus rapides, et l'emploi de variables complexes conjuguées les facilite plus encore. Or, dans les cas les plus simples, les résultats sont entièrement analogues pour le plan et pour l'espace (*cf.* par exemple, l'instabilité des figures piriformes à deux dimensions, n° 113); il est donc permis de supposer que la similitude est complète entre les deux problèmes; et M. Jeans en déduit que l'épilogue des formations piriformes, c'est la séparation de la masse en deux ou plusieurs composantes distinctes; une figure correspondant aux cas de $e = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 1$ et $e > 1$ montre clairement l'évolution du phénomène (p. 116).

En résumé, dans les trois types de problèmes envisagés jusqu'ici, il n'existe pas de figures stables, sauf au début des séries sphéroïdales et ellipsoïdales. Que se passe-t-il donc lorsque la configuration d'équilibre devient instable? Dans une lettre à Darwin, Poincaré annonçait que « la masse fluide devrait se dissoudre par un cataclysme subit »; suivant l'interprétation de M. Jeans, cette

phrase signifie simplement qu'un problème de Dynamique se substitue alors au problème de Statique. D'ailleurs, la question semble dépasser les ressources actuelles de l'Analyse, et l'auteur ne l'aborde (Chap. VI) que dans des cas très particuliers : problème des marées, avec approche très lente ou très rapide de l'astre perturbateur. Il paraît vraisemblable que, dans les trois problèmes principaux, le mouvement doit consister en la formation de sillons et d'étranglements, qui se creusent progressivement et finissent par subdiviser la masse en plusieurs éléments isolés.

Le Chapitre VII nous introduit dans un ordre de recherches tout différent : désormais les milieux gravitants ne seront plus assujettis à l'incompressibilité ; d'ailleurs, il est bien évident que le cas d'un milieu compressible ne pourra être soumis au calcul que sous la réserve d'hypothèses générales d'une nature très simple. L'auteur envisage d'abord le cas d'un milieu de composition uniforme, cas qui, sous plus d'un rapport, se rapproche des précédents. Ainsi, on peut appliquer la transformation de Green (n° 141) ; les configurations d'équilibre seront bien déterminées par la nature de leurs surfaces frontières, et l'on pourra les ranger en séries linéaires (sphéroïdales ou ellipsoïdales) ; quant à la discussion de la stabilité, ce sera toujours un cas d'espèce (n° 145) : d'ailleurs, une condition nouvelle doit être vérifiée : la pression devra toujours être positive.

Cette remarque s'applique encore au cas de l'hétérogénéité, et notamment, au célèbre modèle de Roche, que l'auteur étudie de nouveau, après Poincaré. Ce système présente un mode de dislocation complètement différent de celui des piroïdes : lorsque $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ devient trop grand par suite du refroidissement, la matière astrale s'échappe radialement de l'arête équatoriale ; dans le problème des marées, les émissions gazeuses forment deux jets, suivant deux directions diamétralement opposées. Désormais, ce modèle interviendra souvent dans le développement de M. Jeans : par exemple, à propos de la formation des bras des nébuleuses spirales, ou de l'origine des deux courants d'étoiles de la Voie lactée. Il est donc important d'étudier de plus près les caractéristiques de ces mouvements, et, en particulier, leur stabilité. Or, d'après M. Jeans, la méthode des potentiels retardés s'appliquerait au problème (n° 160) : l'excès de condensation $\frac{\delta\rho}{\rho}$ du mouvement varié par rap-

port au mouvement primitif se propagerait sous formes d'ondes; les bras présenteraient donc une tendance à se diviser en une série de noyaux distincts.

En définitive, les propriétés du modèle de Roche se différentient nettement de celles des masses liquides homogènes. Peut-on considérer les deux classes de problèmes correspondants comme des cas limites d'une classe mixte, définie par des conditions physiques continuement variables? M. Jeans répond par l'affirmative et de deux façons différentes. Il remplace d'abord le noyau infiniment petit de Roche par un noyau de dimensions non nulles et de densité finie; soit s le rapport de son volume à celui de l'atmosphère. Puis il envisage des milieux qui satisfont à la loi $p = k\rho^{\gamma} + p_0$; pour $\gamma = \infty$, on retrouve les premiers problèmes, et pour $\gamma = 1,2$, le problème de Roche. Cela étant, l'auteur applique aux nouveaux problèmes la méthode qu'il a développée avec tant de bonheur pour le piroïde et il arrive à cette conclusion (n° 185) : pour $s < 0,25$, le modèle de Roche généralisé se sectionne par étranglement, tandis que pour $s > 0,25$ il se résorbe par émissions équatoriales; et des conclusions analogues s'appliquent au modèle adiabatique ($p_0 = 0$) suivant que l'on a $\gamma > 2,2$ ou $\gamma < 2,2$. Ces énoncés se rapportent d'ailleurs aux problèmes de masses tournantes; mais on peut les étendre aux problèmes de marées (n° 186).

Le Chapitre VIII (Évolution des masses gazeuses) a pour objet la justification théorique des hypothèses de Russell sur l'évolution des étoiles. Après Clausius, Poincaré et Eddington, l'auteur reprend la théorie du viriel; et s'appuyant sur la théorie cinétique des gaz, il montre que les nuages stellaires sont radialement stables ou instables selon que γ est supérieur ou inférieur à 1,33. Dans le premier cas, la masse gazeuse rayonne de la chaleur en se contractant; du moins, il en est ainsi tant que les lois des gaz parfaits sont applicables; mais à un certain moment, ceci n'est plus exact : la contraction devient impossible et le rayonnement obéit alors à la loi $E = kT^4$ (T désignant la température absolue). L'auteur envisage plus spécialement le cas des contractions *homologues* (n°s 192-196); la loi de Lane $aT = \text{const.}$ se trouve alors vérifiée (a désignant la dimension linéaire).

Les Chapitres suivants, qui ont pour objet une reconstitution synthétique des mondes ont un caractère de plus en plus hypothétique; bornons-nous à un rapide aperçu. Le Chapitre IX (Évolu-

tion des nébuleuses tournantes) modifie d'abord les données des problèmes antérieurs de façon à les rapprocher le plus possible de la réalité. Par exemple, il résulte des observations spectroscopiques que la loi adiabatique $p = k\rho^{\gamma}$ ne peut être rigoureusement vérifiée à l'intérieur d'une nébuleuse; on pourrait obtenir des résultats plus exacts en faisant varier k d'un point à l'autre de la masse (n°s 203-204). De même, il sera préférable de supposer que la nébuleuse ne tourne pas tout d'une pièce, mais que ω^2 va en croissant, par exemple, du centre à la périphérie. Effectivement, les configurations d'équilibre ainsi obtenues présentent de troublantes analogies avec les belles photographies de nébuleuses planétaires, faites à l'Observatoire de Mount-Wilson (n° 206). Les théories antérieures peuvent encore être adaptées à l'étude des nébuleuses spirales; M. Jeans entre même dans le détail des vérifications numériques; mais les nombres ainsi obtenus, pour ρ ou pour ω par exemple, proviennent d'observations délicates et de généralisations par analogies; malgré leurs concordances, souvent impressionnantes, il est permis de les regarder comme bien incertains.

Les mêmes remarques s'appliquent au Chapitre X (Évolution des amas d'étoiles). Admettons que les amas procèdent des nébuleuses; dans l'impossibilité où nous nous trouvons de discuter la désagrégation de la nébuleuse, nous pouvons nous poser le problème inverse : remonter de l'amas à la nébuleuse (n°s 218-221). L'étude d'un amas peut d'ailleurs être abordée à l'aide des méthodes de la théorie cinétique des gaz; le problème actuel est même plus simple, car on n'a pas à se préoccuper des collisions : c'est ainsi que de la dynamique des solides, à l'hydrodynamique, puis à la dynamique des gaz et à la dynamique stellaire, l'étude des réactions intérieures devient progressivement plus simple. Dans cet ordre d'idées, M. Jeans étudie particulièrement la loi de la répartition des vitesses; au bout d'un temps suffisamment long, on peut supposer que l'amas satisfait à la loi de Maxwell. Or, de tous les amas stellaires, le plus connu, et pour cause, est celui de la Voie lactée; et ses étoiles vérifient cette dernière loi d'une manière très satisfaisante, sauf, peut-être, les étoiles du type B; mais on a le droit d'admettre que ce sont aussi les plus récentes.

Le Chapitre XI est réservé au problème particulièrement ardu de la formation des étoiles doubles; si l'on suppose qu'un tel système procède de la subdivision d'une figure piriforme (gazeuse),

on trouve que la densité du couple est au moins égale à $\frac{1}{4}$; d'après les résultats de Russell, les étoiles géantes du type A auraient donc été formées autrement. Mais ces conclusions supposent que le système vérifie la loi adiabatique; elles ne font pas état des phénomènes d'ionisation, de dissociation atomique qui doivent se produire à l'intérieur des masses (n°s 255-264). Peut-on expliquer encore d'autres particularités des étoiles doubles, telles que la corrélation entre la durée d'une période et l'excentricité de l'orbite? Peut-on reconnaître si les composantes d'un système multiple ont eu une origine commune ou, si, au contraire, elles se sont associées accidentellement (n°s 278-282)? Autant de questions qui attendront longtemps leurs réponses, malgré le secours de la Mécanique statistique!

Nous voudrions nous arrêter plus longuement sur le dernier Chapitre, réservé spécialement au système solaire. L'auteur cherche à en expliquer la formation par la théorie des marées, sans omettre, d'ailleurs, tous les obstacles qu'elle rencontre, en particulier pour la Terre; puis il essaie de reconstituer l'échelle des temps. Par exemple, il propose le chiffre de 560 millions d'années pour la période de dissociation stellaire de notre nébuleuse primitive, et celui de 250 millions d'années pour la solidification de la Terre (n° 307); suivant lui, ces résultats seraient conformes aux estimations géologiques; mais satisferont-ils tous les géologues?... D'ailleurs, selon M. Jeans, le problème de la mesure du temps ne présente aucune difficulté spéciale pour l'ensemble de l'Univers; il ne devient véritablement épineux que lorsqu'on le pose pour une étoile d'un type déterminé; et le Soleil rentre précisément dans cette catégorie.... Mais M. Jeans s'est-il demandé si le problème a un sens par lui-même? De quelle « horloge » faudra-t-il se servir? Et quel principe de permanence pourra-t-on invoquer?

Le trop bref résumé de ces derniers Chapitres ne peut donner qu'une notion bien incomplète de la diversité des problèmes abordés par M. Jeans, de la variété des hypothèses qu'il a discutées et de la hardiesse des solutions qu'il a proposées, solutions toutes provisoires d'ailleurs, car la disproportion est énorme entre les brillantes recherches du début et les conclusions, un peu téméraires, de la fin. Mais il n'appartenait pas à l'auteur qu'il en fût autrement : car, pour rester fidèle à la pensée même de M. Jeans, on ne pourra approfondir utilement la solution analytique d'un problème de

cosmogonie que lorsque les astronomes auront fourni de nouvelles données, plus nombreuses et plus précises : une fois de plus, la Nature se fera l'auxiliaire du géomètre qui cherchera à en dérober les secrets. Or, à cet égard, comme le disait récemment M. Deslandres, les résultats obtenus par la collaboration des astronomes et des physiciens offrent « un champ d'études d'une richesse inespérée », et « dont la moisson est seulement commencée ». Puisse l'Ouvrage de M. Jeans leur susciter le concours des géomètres; puissent leurs efforts réunis résoudre ces deux énigmes, les plus troublantes de toutes d'après M. Jeans : la place singulière du système solaire dans l'Univers, et la place exceptionnelle de la Terre dans le système solaire.

René Garnier.

MÉLANGES

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI;

Par M. Georges VALIRON.

On sait qu'étant donnée une fonction entière $f(z)$ d'ordre fini non entier ρ, l'exposant de convergence de la suite des zéros est égal à ρ. Si r_n désigne le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\rho}} \tag{1}$$

peut être convergente ou divergente; je dirai dans le premier cas que la fonction est de la *première classe* de son ordre, dans le second qu'elle est de la *deuxième classe*. M. Borel a montré que le maximum $M(r)$ du module de $f(z)$ pour $|z| = r$ vérifie, lorsque la fonction est de première classe, la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\rho}} = 0; \tag{2}$$

mais la seule propriété utilisée dans la démonstration est que le quotient $\frac{n}{r_n^{\rho}}$ tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et en réalité

la condition (2) est la condition nécessaire et suffisante pour que ce quotient tende vers zéro.

Je démontre dans ce qui suit que, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de la première classe est que l'intégrale

$$(3) \qquad \int_{\alpha}^{r} \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}}\, dx \qquad (\alpha > 0)$$

reste bornée quel que soit r. Il résulte de cette propriété que, étant donnée une fonction de la première classe, $M(r)$ le maximum de son module, toute fonction de même ordre dont le maximum du module reste inférieur à $M(r)^k$, K étant fini, est aussi de la première classe. La classe d'une fonction (d'ordre non entier) ne change donc pas par la dérivation, les fonctions $f(z) - x$ sont toutes de la même classe, etc.

Dans la démonstration je fais usage de la proposition suivante qui est en un certain sens la généralisation d'une inégalité bien connue de M. Jensen : Si $n(x)$ est le nombre des zéros de la fonction $f(z)$ dans le cercle $|z| = x$, et k un nombre positif quelconque, on a l'inégalité

$$(4) \qquad \int_{\alpha}^{r} \frac{n(x)}{x^{1+k}}\, dx < \frac{\log M(r)}{r^k} + k \int_{\alpha}^{r} \frac{\log M(x)}{x^{1+k}}\, dx + K,$$

α et K étant des constantes positives.

Je donne ensuite les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients du développement de Taylor de la fonction $f(z)$ pour que cette fonction soit de la première classe. Lorsque ces conditions sont satisfaites et que l'ordre est entier, le genre est inférieur à l'ordre et la fonction jouit des propriétés des fonctions d'ordre non entier; je dirai encore dans ce cas que la fonction est de la première classe de son ordre.

1. Je démontrerai d'abord la proposition suivante qui remplace la condition de convergence de la série (1) par une autre plus commode :

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la série*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\rho}}$$

converge, est que l'intégrale

$$(5) \qquad \int_0^X \frac{n(x)}{x^{1+\rho}}\,dx,$$

où $n(x)$ désigne le nombre des quantités r_n inférieures à x, soit bornée.

On vérifie de suite que l'on a

$$(6) \qquad \sum_1^n \frac{1}{r_q^\rho} = \rho \int_0^{r_n} \frac{n(x)}{x^{1+\rho}}\,dx + \frac{n}{r_n^\rho}.$$

Si la série (1) converge, le second membre de l'égalité (6) est borné quel que soit n, donc *a fortiori* l'intégrale. Inversement, si l'intégrale (5) est bornée, donc convergente, l'intégrale

$$\rho \int_{r_n}^{2r_n} \frac{n(x)}{x^{1+\rho}}\,dx > \left(1 - \frac{1}{2^\rho}\right)\frac{n}{r_n^\rho}$$

tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, donc $\frac{n}{r_n^\rho}$ tend vers zéro, le premier membre de l'égalité (6) est borné. La proposition est complètement démontrée.

2. On sait que le théorème bien connu de M. Jensen donne une relation d'inégalité entre le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière et une fonction de r et des modules r_n des zéros. Parmi les diverses méthodes qui ont été données pour obtenir la formule de M. Jensen, celle qui conduit le plus naturellement à la formule le plus directement utilisable consiste à intégrer convenablement l'égalité de Cauchy donnant le nombre des zéros. Elle se généralise facilement.

Considérons l'égalité de Cauchy donnant le nombre $n(x)$ des zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle $|z| = x$,

$$n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,\frac{f'(xe^{i\theta})}{f(xe^{i\theta})}\,e^{i\theta}\,d\theta \qquad [f(0) \neq 0];$$

si l'on divise les deux membres de cette égalité par x et que l'on intègre entre 0 et r, on obtient la formule de M. Jensen. Divisons les deux membres par x^{1+k}, k étant positif, et intégrons entre $x_1 = r_{n-1} - \varepsilon$ et $x_2 = r_n + \varepsilon$, nous obtenons

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{n(x)}{x^{1+k}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^k}\int_0^{2\pi} \frac{f'(xe^{i\theta})}{f(xe^{i\theta})}\,e^{i\theta}\,d\theta,$$

et il est clair que l'on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le second membre. On a d'ailleurs

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(xe^{i\theta})}{f(xe^{i\theta})} e^{i\theta} \frac{dx}{x^k} = \left[\frac{\log f(xe^{i\theta})}{x^k}\right]_{x_1}^{x_2} + k \int_{x_1}^{x_2} \frac{\log f(xe^{i\theta})}{x^{1+k}} dx,$$

et si l'on intervertit de nouveau l'ordre des intégrations dans l'intégrale du second membre, et si l'on prend la partie réelle, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} \frac{n(x)}{x^{1+k}} dx &= \frac{1}{2\pi x_2^k} \int_0^{2\pi} \log|f(x_2 e^{i\theta})| d\theta \\ &- \frac{1}{2\pi x_1^k} \int_0^{2\pi} \log|f(x_1 e^{i\theta})| d\theta \\ &+ \frac{k}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^{1+k}} \int_0^{2\pi} \log|f(xe^{i\theta})| d\theta.\end{aligned}$$

Mais la fonction

$$(7) \qquad V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(xe^{i\theta})| d\theta$$

est continue même lorsque x est le module d'un zéro de $f(z)$ comme on le voit de suite en mettant en évidence dans le logarithme le terme qui devient infini ; on peut donc faire tendre x_1 et x_2 vers r_{n-1} et r_n, puis additionner les égalités obtenues, ce qui conduit à l'égalité

$$(8) \qquad \int_0^r \frac{n(x)}{x^{1+k}} dx = \frac{V(r)}{r^k} - \frac{V(\alpha)}{\alpha^k} - k \int_\alpha^r \frac{V(x)}{x^{1+k}} dx,$$

$V(x)$ étant la fonction définie par l'égalité (7), et α étant un nombre compris entre o et r_1. On verra sans peine que cette égalité peut aussi s'obtenir en multipliant les deux membres de l'égalité de M. Jensen

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx = V(r) - V(o)$$

par $\frac{1}{r^{1+k}}$ et en intégrant α et x.

L'égalité (8) peut s'écrire sous une forme plus simple ; la fonction $V(x)$ admet en effet une dérivée continue par sections $\frac{n(x)}{x}$; en effectuant une intégration par parties sur l'intégrale du second, on obtient

$$(9) \qquad \int_0^r \frac{n(x)}{x^{1+k}} dx = \int_\alpha^r \frac{V'(x)}{x^k} dx.$$

Je n'utiliserai que les inégalités obtenues en remplaçant dans (8)

$V(x)$ par $\log M(x)$ qui lui est supérieur et qui admet, d'après les résultats de M. Blumenthal [1], une dérivée par section qui est intégrable. D'une façon générale, si l'on remplace dans (8) $V(x)$ par une fonction $W(x)$ admettant une dérivée par section intégrable, et qui est constamment supérieure ou égale à $\log M(x)$ $[\log M(x) \leqq W(x)]$, on peut effectuer l'intégration par parties qui fait passer de (8) à (9) sur le second membre de l'inégalité obtenue, mais il s'introduit alors une constante.

On a ainsi le résultat suivant qu'on reconnaîtra sans peine être valable, même lorsque $f(0) = 0$:

II. *$f(z)$ étant une fonction entière, $n(x)$ le nombre des zéros et $M(x)$ le maximum du module dans le cercle $z \leqq x$, et k un nombre positif, on a*

$$(9) \qquad \int_\alpha^r \frac{n(x)}{x^{1+k}}\,dx < K - \frac{\log M(r)}{r^k} - k\int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{1+k}}\,dx \qquad (\alpha > 0),$$

K étant une constante, et si $W(x)$ est une fonction constamment supérieure ou égale à $\log M(x)$ pour $x > x_0$, et admettant une dérivée par section intégrable, on a

$$(10) \qquad \int_\alpha^r \frac{n(x)}{x^{1+k}}\,dx < K' + \int_\alpha^r \frac{W'(x)}{x^k}\,dx,$$

K' étant une constante.

3. Considérons une fonction d'ordre ρ non entier et de la première classe, c'est-à-dire telle que la série (1) converge. L'intégrale (5) a un sens pour $X = +\infty$. Supposons pour simplifier $f(0) \neq 0$, et désignons par α_n le $n^{\text{ième}}$ zéro ($|\alpha_n| = r_n$), nous avons

$$f(z) = e^{P(z)} \prod_1^\infty E\left(\frac{z}{\alpha_n}, p\right) \qquad \left[E(u, p) = (1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}\right],$$

p étant l'entier immédiatement inférieur à ρ et $P(z)$ un polynome de degré p au plus. On constate aisément que le logarithme du module du facteur primaire $E(u, p)$ est inférieur, quel que soit u, à

$$A\,\frac{|u|^{p+1}}{1+|u|},$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXV, p. 213.

A étant une constante qui dépend de p. L'avantage de l'emploi de cette expression est que, d'après les formules générales de M. Denjoy [1], elle reste dans un rapport fini avec la valeur exacte du maximum de $\log E(u, p)$. Cette propriété ne sera d'ailleurs pas utilisée dans ce qui suit et je ne la signale que pour montrer que, dans le cas de l'ordre entier où le résultat que j'obtiendrai n'est plus valable, cela tient certainement à l'influence des arguments de zéros.

Nous obtenons

$$\log M(r) < B r^p + A \sum_1^\infty \frac{v_n^{p+1}}{1 + v_n} \qquad \left(v_n = \frac{r}{r_n}\right),$$

B étant une constante. La série du second membre de cette inégalité peut s'écrire sous forme d'intégrale en introduisant la fonction discontinue $v(y)$ égale à v_n pour $n \leqq y < n + 1$, on peut alors intégrer par parties, ce qui est légitime, car $\frac{n}{r_n^{p+1}}$ tend vers zéro puisque l'ordre est moindre que $p + 1$, en prenant ensuite pour nouvelle variable $x = \frac{r}{v(y)}$, on obtient l'égalité

$$\sum_1^\infty \frac{v_n^{p+1}}{1 + v_n} = \int_0^\infty \frac{r^{p+1} n(x)}{x^{p+1}(x + r)} \frac{(p+1)x + pr}{x - r} dx,$$

qu'il est d'ailleurs loisible de vérifier directement en effectuant l'intégration du second membre (pour $r_{n-1} \leqq x < r_n$, $n(x)$ est égal à n). Comme $n(x)$ est nul dans l'intervalle $0, r_1$, on peut aussi prendre pour limite inférieure de l'intégrale un nombre quelconque compris entre 0 et r_1.

Le quotient

$$\frac{(p+1)x + pr}{x - r}$$

variant entre entre p et $p + 1$, on a

$$\log M(r) < B r^p + A_1 \int_{r_1}^\infty \frac{n(x) r^{p+1}}{x^{p+1}(x + r)} dx \text{ [2]},$$

---

[1] *Thèse*, p. 35.

[2] D'après les résultats de M. Denjoy rappelés ci-dessus, on peut prendre pour A_1 une constante indépendante de p.

et par suite, puisque p est inférieur à ρ,

$$(11)\qquad \int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{1+\rho}}\,dx < K + A_1 \int_\alpha^r \frac{dy}{y^{\rho-p}} \int_{r_1}^\infty \frac{n(x)}{x^{p+1}(y+x)}\,dx,$$

K étant une constante. Or, l'intégrale

$$\int_{r_1}^y \frac{n(x)}{x^{p+1}(x+y)}\,dx < \int_{r_1}^y \frac{n(x)}{x^{p+2}}\,dx$$

converge uniformément quel que soit y, on peut donc intervertir l'ordre des intégrations dans le coefficient de A_1 dans l'inégalité (11), puis poser $y = tx$, et ce coefficient devient

$$(12)\qquad \int_{r_1}^\infty \frac{n(x)}{x^{\rho+1}}\,U(x)\,dx$$

avec

$$U(x) = \int_{\frac{\alpha}{x}}^{\frac{r}{x}} \frac{dt}{(1+t)t^{\rho-p}} < \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)t^{\rho-p}} = C\ (^1).$$

C étant une constante liée aux fonctions circulaires. Or lorsqu'on remplace $U(x)$ par une constante dans l'intégrale (12), cette intégrale a encore un sens puisque, par hypothèse, l'intégrale (5) converge. Le coefficient de A_1 dans l'inégalité (11) est donc borné, et nous avons ce résultat, valable même si $f(0) = 0$:

III. *Pour toute fonction entière d'ordre ρ non entier et de première classe, l'intégrale*

$$(3)\qquad \int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{1+\rho}}\,dx$$

est bornée.

4. L'application de ces trois propositions aux fonctions d'ordre fini non entier est immédiat. La proposition III montre que l'intégrale (3) est bornée pour toute fonction de la première classe; inversement, si cette intégrale est bornée, donc convergente, l'intégrale

$$\int_r^{2r} \frac{\log M(x)}{x^{1+\rho}}\,dx > \left(1 - \frac{1}{2^\rho}\right) \frac{\log M(r)}{\rho r^\rho}$$

tend vers zéro lorsque r croît indéfiniment; donc, *a fortiori*, $\frac{\log M(r)}{r^\rho}$

(1) Dans le cas de l'ordre entier, $\rho = p + 1$, tous les calculs précédents sont valables, mais l'intégrale $U(x)$ n'est plus bornée.

tend vers zéro; l'inégalité (4), dans laquelle on prend $k = \rho$, montre alors que l'intégrale (5) est bornée, la fonction est de première classe. Par suite :

IV. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre ρ non entier soit de la première classe est que l'intégrale* (3) *soit bornée.*

On déduit de cette proposition diverses conséquences qui ne pouvaient se déduire des résultats connus de la théorie des fonctions entières et qui montrent que, sur ce point encore, l'hypothèse de l'ordre non entier introduit des simplifications :

Si $M(r)$ est le maximum du module d'une fonction d'ordre ρ de la première classe, toute fonction d'ordre ρ dont le maximum du module $M_1(r)$ reste inférieur à $M(r)^h$, h fini, est aussi de la première classe. De même, si $M(r)$ étant le module maximum d'une fonction d'ordre ρ de la deuxième classe, le module maximum $M_1(r)$ d'une fonction d'ordre ρ est supérieur à $M(r)^h$, $h > 0$, cette fonction est de la deuxième classe.

La somme d'une fonction $f(z)$ d'ordre ρ et d'une fonction d'ordre moindre, somme qui est d'ordre ρ, est de même classe que $f(z)$. La somme de deux fonctions d'ordre ρ et de première classe est de la première classe si elle est d'ordre ρ.

En particulier, les fonctions

$$f(z) - x$$

sont toutes de la même classe quel que soit x.

On obtient de même un résultat relatif à la dérivée en s'appuyant sur ce que le rapport des logarithmes des modules maxima d'une fonction d'ordre fini et de sa dérivée tend vers 1 [1]; on en déduit que :

La dérivée d'une fonction d'ordre fini non entier est de la même classe que cette fonction.

Lorsqu'une fonction d'ordre ρ entier est telle que l'intégrale (3) est bornée, il en résulte encore que la série (1) est convergente, on peut donc former avec les zéros un produit canonique $H(z)$ de

[1] G. Valiron, *Bulletin de la Société mathématique*, 1914, p. 247.

genre $\rho - 1$, et l'on a, d'après un théorème de M. Borel [1],

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log|\Pi(z)|}{r^\rho} = 0.$$

On sait que, dans ces conditions, il existe une suite de cercles de rayon indéfiniment croissants et de centre origine, sur lesquels le logarithme du minimum du module de $\Pi(z)$ est supérieur à $-\varepsilon r^\rho$, si petit que soit le nombre positif ε [2]. Le facteur exponentiel $P(z)$, qui s'introduit dans la décomposition de $f(z)$ en facteurs, vérifie donc sur ces cercles l'inégalité

$$\text{partie réelle de } P(z) > \log M(r) - \varepsilon r^\rho,$$

et, puisque $\log M(r)$ est aussi moindre que εr^ρ à partir d'une valeur de r, il résulte de cette inégalité que $P(z)$ est de degré inférieur à ρ. Donc :

V. *Une fonction d'ordre entier ρ pour laquelle l'intégrale* (3) *est bornée est de genre $\rho - 1$.*

5. Nous allons chercher maintenant les relations entre la convergence ou la divergence de l'intégrale (3) et les propriétés de la suite des coefficients du développement de Taylor

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$$

de la fonction. Je rappellerai quelques-uns de mes résultats antérieurs [3]. Si l'on pose $\log|a_n| = -g_n$, si l'on construit avec les points de coordonnées n, g_n un polygone de Newton tournant sa concavité vers le haut et laissant tous les points considérés au-dessus de ses côtés ou sur ses côtés et si l'on désigne par $\log R_n$ la pente de ce polygone entre les points d'abscisses $n-1$ et n, le rang $N(x)$ du terme $|a_n|x^n$ ayant la plus grande valeur [terme maximum de $f(z)$ pour $|z| = x$] est le plus grand des nombres n tels que R_n soit inférieur à x; on a, quel que soit n,

$$|a_n| \leqq |a_0| \frac{1}{R_1 R_2 \ldots R_n},$$

---

(1) *Leçons sur les fonctions entières*, p. 61.

(2) *Voir* le Mémoire de M. Lindelöf, *Sur un théorème de M. Hadamard dans la théorie des fonctions entières* (*Rendiconti Mat. di Palermo*, t. XXV).

(3) *Voir* ma *Thèse*, p. 7-11.

et, lorsque la fonction est d'ordre fini,

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{\int^r \frac{N(x)}{x}\,dx} = 1. \tag{13}$$

J'ai appelé R_n le *rapport rectifié* de $|a_{n-1}|$ à $|a_n|$; les nombres R_n n'étant pas décroissants, la transformation du n° 1 s'applique, il est équivalent de dire que l'intégrale

$$\int_0^r \frac{N(x)}{x^{1+\rho}}\,dx \tag{14}$$

est bornée, ou de dire que la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{R_n^\rho} \tag{15}$$

est convergente.

En m'appuyant sur ces définitions et résultats je vais montrer que :

VI. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale*

$$\int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{1+k}}\,dx \tag{16}$$

soit bornée est que la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{R_n^k} \tag{17}$$

soit convergente.

Nous avons en effet en intégrant par parties

$$\int_\alpha^r \frac{dx}{x^{1+k}} \int_{R_1}^x \frac{N(y)}{y}\,dy = K - \frac{1}{kr^k} \int_{R_1}^r \frac{N(y)}{y}\,dy + \frac{1}{k} \int_\alpha^r \frac{N(x)}{x^{1+k}}\,dx,$$

et en tenant compte de l'égalité (13), nous obtenons

$$\int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{1+k}}\,dx + \frac{\log M(r)}{kr^k} = h(r)\left[K + \frac{1}{k} \int^r \frac{N(x)}{x^{1+k}}\,dx\right],$$

$h(r)$ restant compris entre deux membres positifs fixes lorsque r croît indéfiniment.

Lorsque la série (17) converge, l'intégrale du second membre est bornée, il en est donc de même de celle du premier membre. Inversement, si l'intégrale (16) est bornée, nous savons que $\frac{\log M(r)}{kr^k}$

tend vers zéro, donc l'intégrale du second membre est aussi bornée, la série (16) converge. La proposition est démontrée.

On retrouve en particulier, comme conséquence de cette proposition, que l'exposant de convergence de la suite des nombres R_n est égal à l'ordre ρ de la fonction entière, car pour k supérieur à ρ l'intégrale (16) converge, donc aussi la série (17), et inversement si la série (17) converge, $\frac{\log M(r)}{r^k}$ tend vers zéro, l'ordre est au plus égal à k.

Je remarquerai également qu'il résulte directement de l'égalité (13) et de l'inégalité (10) que l'on a, pour $k > 0$,

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x^{1+k}}\,dx < K + (1+\varepsilon)\int_0^r \frac{N(x)}{x^{1+k}}\,dx,$$

inégalité qui met en évidence que la convergence de la série (15) entraîne celle de la série (1).

En comparant les énoncés IV et VI, nous obtenons ce résultat :

VII. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre ρ (non entier) soit de la première classe est que la série* (15) *formée avec les coefficients rectifiés du développement de Taylor soit convergente.*

Autrement dit, lorsque l'ordre ρ n'est pas entier, les séries (1) et (15) convergent ou divergent en même temps.

Pour les fonctions d'ordre entier, on a seulement cette proposition :

VIII. *Une fonction d'ordre entier ρ pour laquelle la série* (15) *converge est de genre $\rho - 1$.*

Je dirai encore que ces fonctions d'ordre entier sont de la *première classe* de leur ordre; donc, quel que soit ρ, les fonctions de la première classe sont celles pour lesquelles les séries (1) et (15) et l'intégrale (3) sont convergentes, ces trois propriétés étant équivalentes lorsque l'ordre n'est pas entier, tandis que dans le cas de l'ordre entier les deux dernières conditions seules sont suffisantes et entraînent la première. Lorsque l'ordre est entier, la série (1) peut converger et cependant la fonction être de la seconde classe, l'intégrale (3) et la série (15) étant divergentes. Les seules fonctions entières pouvant présenter les anomalies bien connues des fonctions d'ordre entier sont les fonctions d'ordre

entier de la seconde classe; car pour celles de la première classe les propriétés énoncées au n° 4 sont encore vraies et le genre étant $\rho - 1$, le cas d'exception de Picard-Borel ne peut se présenter.

6. Il est clair que lorsqu'une fonction entière $f(z)$ est majorée par une autre fonction d'ordre ρ et de première classe, elle est de première classe si elle est d'ordre ρ. Comme application de cette remarque, je démontrerai la proposition suivante :

Si les coefficients du développement de Taylor de $f(z)$ sont tels que la série

$$\sum_{n=q}^{n=\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|^k$$

est convergente, la fonction $f(z)$ est d'ordre k au plus et si elle est d'ordre k elle est de la première classe, en particulier elle est toujours de genre moindre que k.

On peut supposer $q = 0$, et poser

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{l_{n+1}},$$

l'hypothèse est alors que la série

$$\sum \frac{1}{l_n^k}$$

est convergente. Les nombres l_n ont une limite inférieure pour $n = +\infty$, égal à $+\infty$; on peut donc les ranger en une suite croissante

$$l_{n_1}, l_{n_2}, \ldots, l_{n_p}, \ldots,$$

et la série

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{l_{n_p}^k}$$

est évidemment convergente. Si l'on pose

$$A_p = \frac{|a_0|}{l_{n_1} . l_{n_2}, \ldots, l_{n_p}},$$

la fonction

$$F(r) = \sum_1^\infty A_p r^p$$

majore $f(z)$, car $\frac{\Lambda_p}{|a_0|}$ est le produit des p plus grands nombres $\frac{1}{l_{n_p}}$, tandis que $\frac{a_p|}{|a_0|}$ est le produit de p de ces nombres. Or cette fonction $F(r)$, pour laquelle $R_p = l_{n_p}$, est d'ordre inférieur à k ou bien d'ordre k et de la première classe. La proposition énoncée est donc démontrée; elle avait été déduite par M. Polyà [1] d'un théorème de nature algébrique de M. Schur dans le cas particulier où $k = 2$.

7. Je me bornerai à signaler en terminant que les considérations précédentes se généralisent aisément en remplaçant la fonction x^ρ par les fonctions plus générales $x^\rho (\log x)^{\rho_1} \ldots (\log_p x)^{\rho_p}$ introduites par M. Lindelöf dans la théorie des fonctions entières, et d'une façon plus générale par toute fonction dérivable croissante $U(x)$ qui vérifie la condition

$$\lim_{x=\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} = \rho,$$

ce qui permet les intégrations par parties [2].

SUR LES COURBES DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE;

PAR M. JEAN CHAZY.

1. M. Picard a complété sur un point la théorie des courbes définies par une équation différentielle réelle du premier ordre, en montrant qu'à un col n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les deux caractéristiques holomorphes [3].

Dans l'étude de certains cas particuliers du problème des trois corps, et pour être assuré d'épuiser les mouvements correspondants, j'ai été conduit à apporter des compléments analogues à la

[1] Cette proposition a été énoncée par M. Polyà à la Réunion de la Société mathématique suisse de 1920.

[2] Il suffit même de supposer que les limites d'indétermination pour x infini de l'expression précédente sont ρ et un nombre positif inférieur à ρ.

[3] C'est-à-dire dont les coordonnées d'un point s'expriment au voisinage du col en fonctions holomorphes d'un paramètre.

théorie des courbes définies par un système différentiel du second ordre

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1}$$

où X, Y, Z sont des fonctions réelles des trois variables x, y, z, holomorphes et nulles au point singulier $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

En ce point singulier, sous des conditions d'inégalité entre les coefficients des fonctions X, Y, Z, passent trois caractéristiques holomorphes ([1]), c'est-à-dire dont les coordonnées d'un point s'expriment en fonctions holomorphes d'un paramètre; et les tangentes au point considéré à ces trois caractéristiques ne sont pas situées dans un même plan. Poincaré a défini ([2]) d'une part, comme points singuliers isolés caractérisés par des inégalités entre les coefficients, les nœuds, les cols, les foyers et les cols-foyers, et d'autre part les lignes de nœuds, les lignes de cols et les lignes de foyers. A un col, à un col-foyer, ou à un point d'une ligne de nœuds ou d'une ligne de foyers, Poincaré a montré ([3]) qu'aboutissent une infinité de caractéristiques qui engendrent une surface S, satisfaisant nécessairement à l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z, \tag{2}$$

et admettant un plan tangent au point singulier considéré : parmi les trois caractéristiques holomorphes, deux sont situées sur la surface S, et la troisième, en particulier la ligne de nœuds ou de foyers elle-même, n'est pas tangente au point singulier à la surface S,

---

([1]) Il suffit par exemple que l'équation caractéristique n'ait ni racine nulle (à moins que le point considéré n'appartienne à une ligne de points singuliers: alors cette ligne elle-même est l'une des trois caractéristiques holomorphes), ni racine multiple, ni deux racines de même signe et multiple l'une de l'autre. Mais ces conditions ne sont pas nécessaires, et peuvent être élargies au moyen des théorèmes d'existence des caractéristiques les plus généraux démontrés aujourd'hui (cf. *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. II, vol. 3, fasc. 1, article de P. Painlevé, p. 49-53). Il semble que Poincaré ait le premier affirmé (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. II, 1886, p. 154-155 et *passim*) l'existence des trois caractéristiques holomorphes, en renvoyant pour la démonstration au Mémoire célèbre de Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, 36e cahier, 1856, p. 133-198), où toutefois la proposition n'est pas énoncée expressément.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. II, 1886, p. 153-167.

([3]) *Ibid.*, p. 155-157.

puisque les tangentes aux trois caractéristiques holomorphes ne sont pas situées dans un même plan.

Je me propose de démontrer les propositions suivantes :

I. *A un col isolé ou à un col-foyer n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les caractéristiques situées sur la surface* S, *et la troisième caractéristique holomorphe*, que Poincaré a appelée déjà *caractéristique isolée*.

II. *A un point d'une ligne de nœuds ou d'une ligne de foyers n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les caractéristiques situées sur la surface* S, *et la ligne de nœuds ou de foyers elle-même.*

III. *A un point d'une ligne de cols n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les trois caractéristiques holomorphes, dont l'une est la ligne de cols elle-même.*

IV. *Toute caractéristique dont la distance d'un point à une ligne de nœuds, à une ligne de foyers ou à une ligne de cols, tend vers zéro, aboutit à un point de cette ligne* (¹).

2. La démonstration de M. Picard dans le cas d'un col d'une équation différentielle du premier ordre peut être présentée comme il suit (²).

En prenant des variables x et y, variables qu'on peut appeler encore des coordonnées, telles que les deux caractéristiques holomorphes passant au col aient pour équations $x = 0$ et $y = 0$, M. Picard réduit l'équation différentielle à la forme

$$\frac{dx}{x(\lambda_1 + \ldots)} = \frac{dy}{y(\lambda_2 + \ldots)}; \tag{3}$$

dans les dénominateurs les facteurs de x et de y sont des fonctions de x et y holomorphes pour le système de valeurs $x = 0$, $y = 0$, dont les termes constants λ_1 et λ_2 sont de signes opposés. Une telle réduction est évidemment possible puisque les deux caractéristiques holomorphes ne sont pas tangentes.

Une troisième caractéristique qui aboutit au col $x = 0$, $y = 0$

(¹) Cette dernière proposition signifie, en particulier, qu'une ligne de nœuds, une ligne de foyers, ou une ligne de cols fermées ne peuvent admettre de caractéristiques asymptotes.

(²) *Traité d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. III, p. 209 et 28.

finit par ne plus couper les deux caractéristiques $x = 0$, $y = 0$, et, par suite, quand x et y sont assez petits, les dénominateurs des rapports (3) ne peuvent plus s'annuler : dès lors, les numérateurs dx et dy ne s'annulent pas non plus [1]; les deux différentielles $x\,dx$ et $y\,dy$ ont des signes constants et opposés puisque λ_1 et λ_2 sont de signes opposés. Or il est impossible que les fonctions x^2 et y^2, qui sont positives, tendent vers zéro en variant dans des sens constants et différents l'un de l'autre.

Les seules caractéristiques qui échappent à cette impossibilité sont évidemment les deux caractéristiques $x = 0$ et $y = 0$. Et il est clair que le raisonnement s'applique à toute caractéristique sur laquelle x et y *tendent simultanément vers zéro*, depuis les courbes ayant à l'origine un point ordinaire jusqu'aux courbes admettant l'origine comme point-asymptote.

3. *A un col isolé ou à un col-foyer n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les caractéristiques situées sur la surface* S *et la caractéristique isolée.*

Réduisons d'abord le système différentiel du second ordre (1) au voisinage du col $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, à la forme

$$(4)\qquad \frac{dx}{\lambda_1 x + \ldots} = \frac{dy}{\lambda_2 y + \ldots} = \frac{dz}{\lambda_3 z + \ldots},$$

en n'écrivant que les termes du premier degré en x, y et z, et en supposant les coefficients λ_1 et λ_2 positifs et λ_3 négatif. Sur la surface S mise en évidence par Poincaré, la variable z est fonction holomorphe de x et de y, et, comme, d'autre part, la caractéristique isolée n'est pas tangente à l'origine à la surface S, il est possible par un nouveau changement de variables de faire en sorte que la surface S ait pour équation $z = 0$, et que la

---

[1] Nous considérons sur une caractéristique à partir du point x, y un déplacement infiniment petit dans le sens qui aboutit au col $x = 0$, $y = 0$, et dont les composantes dx, dy ne sont pas nulles à la fois : il revient au même d'égaler les deux rapports (3) à du, et de faire varier u dans le sens qui amène le point x, y au col $x = 0$, $y = 0$; en outre, les deux dérivées $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ sont continues.

Nous utilisons la même remarque plus loin : si le dénominateur de l'un des rapports (1) est différent de zéro, le numérateur correspondant ne peut être nul dans un déplacement infiniment petit sur la caractéristique; et il en est encore de même si, au lieu de l'un des rapports (1), on considère un rapport égal à ces trois rapports, et dont le numérateur est la différentielle d'une fonction de x, y, z.

caractéristique isolée ait pour équations $x = 0$, $y = 0$. Alors, dans le dénominateur de dz, d'après l'équation aux dérivées partielles (2), z sera facteur d'une fonction holomorphe de x, y et z, et, puisque le terme constant λ_3 de cette fonction holomorphe est différent de zéro, on pourra réduire ce dénominateur à $\lambda_3 z$. En outre, dans les développements figurant aux dénominateurs des deux premiers rapports (4), chaque terme contiendra x ou y en facteur, afin que pour $x = y = 0$, ces deux rapports se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, et que les équations (4) puissent exister pour z arbitraire sur la caractéristique isolée.

Par une combinaison évidente, on tire des rapports (4) l'égalité

$$(5) \qquad \frac{x\,dx + y\,dy}{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \ldots} = \frac{dz}{\lambda_3 z}.$$

Au dénominateur du premier membre les termes suivant les deux termes $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ sont de degrés 3 au moins en x, y, z, et contiennent tous en facteur x^2, xy ou y^2; par suite, quand x, y et z tendent vers zéro, ce dénominateur finit par être positif comme λ_1 et λ_2, et en particulier par ne pas s'annuler, sauf sur la caractéristique isolée $x = 0$, $y = 0$. Or une autre caractéristique aboutissant au col $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ finit par ne plus couper cette caractéristique isolée. Donc la différentielle $x\,dx + y\,dy$ a un signe constant, qui est nécessairement le signe moins, puisque la fonction $x^2 + y^2$ est positive et tend vers zéro. D'autre part, sur tout arc de caractéristique situé au-dehors de la surface $z = 0$, la différentielle $z\,dz$ est positive, puisque dans l'équation (5) le coefficient λ_3 et le premier membre sont tous deux négatifs : la fonction z^2 doit croître constamment. Il est donc impossible que la caractéristique considérée coupe une infinité de fois la surface $z = 0$, et il est impossible aussi que la fonction z^2 ne s'annule pas et tende vers zéro en croissant constamment.

Les seules caractéristiques qui échappent à ces impossibilités sont celles pour lesquelles z, ou x et y, sont identiquement nuls, c'est-à-dire les caractéristiques situées sur la surface S et la caractéristique isolée, conformément à la proposition I.

La démonstration subsiste évidemment pour un col-foyer au voisinage duquel le système (4) se ramène à la forme

$$\frac{dx}{\lambda x + \mu y + \ldots} = \frac{dy}{-\mu x + \lambda y + \ldots} = \frac{dz}{\lambda_3 z + \ldots},$$

où nous n'écrivons que les termes du premier degré, et où les coefficients λ et λ_3 sont respectivement positif et négatif. Et la démonstration subsiste encore dans le cas intermédiaire où le système (1) se ramène à la forme

$$\frac{dx}{\lambda x + \ldots} = \frac{dy}{\mu x + \lambda y + \ldots} = \frac{dz}{\lambda_3 z + \ldots}$$

où les coefficients λ et λ_3 sont encore positif et négatif. Dans ce dernier cas existent encore une caractéristique isolée et une infinité de caractéristiques situées sur une surface dont les coordonnées d'un point s'expriment en fonctions holomorphes de deux paramètres; et il suffit, pour démontrer qu'il n'en existe pas d'autres, de substituer dans le raisonnement précédent à la fonction $x^2 + y^2$ la fonction $\alpha x^2 + y^2$, α désignant une constante supérieure à $\frac{\mu^2}{4\lambda^2}$.

4. A un point d'une ligne de nœuds ou de foyers n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les caractéristiques situées sur la surface S *et la ligne de nœuds ou de foyers elle-même.*

Prenons des variables ou des coordonnées x, y, z telles que la ligne de nœuds ait pour équations $x = 0$, $y = 0$, que le point considéré sur cette ligne soit l'origine $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et que la surface S passant en ce point ait pour équation $z = 0$. Au voisinage du point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on peut réduire le système (1) à la forme

$$(6) \qquad \frac{dx}{\lambda_1 x + \ldots} = \frac{dy}{\lambda_2 y + \ldots} = \frac{dz}{z\,\mathrm{P}(x, y, z)},$$

en n'écrivant aux dénominateurs de dx et de dy que les termes du premier degré, et en désignant par λ_1 et λ_2 deux coefficients positifs. Dans le dénominateur de dz, la variable z est facteur d'une fonction $\mathrm{P}(x, y, z)$ holomorphe en x, y, z, d'après l'équation aux dérivées partielles (2); et tous les termes des dénominateurs de dx et dy et de la fonction $\mathrm{P}(x, y, z)$ contiennent en facteur x ou y.

On tire des trois rapports (6) la combinaison évidente

$$(7) \qquad \frac{x\,dx + y\,dy}{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \ldots} = \frac{dz}{z\,\mathrm{P}(x, y, z)};$$

les termes suivant les deux termes $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ au dénominateur du premier membre sont de degrés 3 au moins en x, y, z et contiennent en facteur x^2, xy ou y^2. Donc, au voisinage de l'origine des coordonnées, ce dénominateur ne peut s'annuler, sauf sur la ligne de nœuds $x = 0$, $y = 0$; sur un arc de caractéristique ne rencontrant pas, sauf peut-être en ses extrémités, la ligne $x = 0$, $y = 0$, la différentielle $x\,dx + y\,dy$ ne change pas de signe, la fonction $\sqrt{x^2 + y^2}$ varie dans un sens constant et ne saurait s'annuler deux fois. Donc la caractéristique considérée finit par ne plus couper la ligne de nœuds $x = 0$, $y = 0$, et la quantité $\sqrt{x^2 + y^2}$ tend vers zéro en décroissant constamment.

Si l'on écrit l'équation (7) sous la forme

$$(8) \qquad \frac{P(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \ldots} \times \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dz}{z},$$

on voit que le premier facteur du premier membre est borné en valeur absolue sur l'arc de caractéristique considéré. Dès lors, intégrons l'équation (8) le long de cet arc de caractéristique à partir d'un point fixe et assez voisin de l'origine, jusqu'à un point variable qui tend vers l'origine, et appliquons au premier membre la formule de la moyenne. On arrive à une contradiction semblable à la contradiction classique [1] mise en évidence par Briot et Bouquet : l'intégrale du premier membre est finie, et l'intégrale du second membre tend vers $-\infty$. Les seules caractéristiques qui échappent à cette contradiction sont celles où z, ou bien x et y, sont identiquement nuls.

Le raisonnement subsiste si au dénominateur de dz la variable z est en facteur à une puissance d'exposant supérieur a 1. La démonstration s'étend comme précédemment au cas où l'on considère un point d'une ligne de foyers, ou un point d'une ligne de ces points singuliers intermédiaires qu'on range tantôt dans les nœuds, tantôt dans les foyers, ou enfin un point singulier de passage entre une ligne de nœuds et une ligne de foyers : c'est la proposition II, complétée.

5. Conservons les notations du n° 4, et admettons maintenant

---

(1) Cf. *Journal de l'École Polytechnique*, 36e cahier, 1856, p. 175-176; et PICARD, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. III, p. 27-28.

que sur une caractéristique la distance d'un point à la ligne de nœuds $x = 0$, $y = 0$ tende vers zéro, sans que cette caractéristique aboutisse à un point déterminé de cette ligne. La caractéristique peut sortir du domaine considéré au voisinage du point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, mais admettons qu'elle passe dans ce domaine et que z s'annule une infinité de fois. Considérons un arc de caractéristique où x et y sont arbitrairement petits, et où z s'annule au moins une fois et reste voisin de zéro.

Les équations (7) et (8) sont valables au voisinage du point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Il résulte de l'équation (7) que l'arc de caractéristique considéré peut couper une fois au plus la ligne de nœuds $x = 0$, $y = 0$; diminuons au besoin cet arc de façon que x et y ne s'y annulent plus, mais que z s'y annule encore. Sur l'arc ainsi obtenu, la fonction $\sqrt{x^2 + y^2}$ varie dans un sens constant. Dans l'équation (8), le premier facteur du premier membre est encore borné sur le nouvel arc considéré : intégrons cette équation sur un segment de cet arc où z ne s'annule pas, à partir d'un point fixe jusqu'à un point variable où z tend vers zéro. Comme précédemment, l'intégrale du premier membre est finie d'après la formule de la moyenne, et l'intégrale du second membre tend vers $-\infty$. Donc z ne peut s'annuler à moins de s'annuler identiquement, et dans tous les cas tend vers une limite.

La démonstration subsiste évidemment pour une ligne de foyers, et la proposition IV se trouve démontrée en ce qui concerne les lignes de nœuds et les lignes de foyers.

6. *A un point d'une ligne de cols n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les trois caractéristiques holomorphes, dont l'une est la ligne de cols elle-même.*

Au voisinage d'une ligne de points singuliers $x = 0$, $y = 0$, Poincaré a mis les équations (1) sous la forme générale

$$\frac{dx}{xP(x, y, z) + yP(x, y, z)} = \frac{dy}{xP(x, y, z) + yP(x, y, z)} = \frac{dz}{xP(x, y, z) + yP(x, y, z)},$$

où les six coefficients $P(x, y, z)$ sont des fonctions des trois variables x, y, z, distinctes en général, et holomorphes au point

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ de la ligne considérée; réduisons à nouveau cette forme quand la ligne est une ligne de cols [1].

Par chaque point $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$ de cette ligne, z_0 étant assez petit en valeur absolue, passent deux caractéristiques holomorphes autres que la ligne de cols elle-même : chacune de ces deux caractéristiques peut être représentée par trois développements des fonctions x, y, $z - z_0$ en séries entières convergentes de la fonction t^λ, si l'on désigne par $\frac{dt}{t}$ la valeur commune des trois rapports (1), et si l'on donne une valeur numérique au facteur arbitraire de la variable t. Quand la cote z_0 varie dans un certain intervalle, l'exposant λ et les coefficients de ces trois développements sont des fonctions holomorphes de z_0. Donc les deux caractéristiques holomorphes engendrent deux surfaces analytiques qui se coupent suivant la ligne de cols, et d'ailleurs ne sont pas tangentes le long de cette ligne. Nous pouvons prendre ces deux surfaces comme surfaces de coordonnées $x = 0$, $y = 0$.

Puisque la surface $x = 0$ est un lieu de courbes caractéristiques des équations (1), la fonction x doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$Y\frac{\partial x}{\partial y} + Z\frac{\partial x}{\partial z} = X;$$

donc le dénominateur X est le produit du facteur x par une fonction de x, y, z, holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. De même le dénominateur Y est le produit du facteur y par une fonction de x, y, z holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Et les équations (1) se réduisent à la forme

$$(9)\qquad \frac{dx}{x[\lambda_1 + P_1(x, y, z)]} = \frac{dy}{y[\lambda_2 + P_1(x, y, z)]} = \frac{dz}{xP(x, y, z) + yP(x, y, z)},$$

---

[1] En un point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ d'une ligne de nœuds $x = 0$, $y = 0$, on peut de même ramener en général les équations (1) à la forme

$$\frac{dx}{x[\lambda_1 + P_1(x, y, z)]} = \frac{dy}{y[\lambda_2 + P_1(x, y, z)]} = \frac{dz}{xzP(x, y, z) + yzP(x, y, z)},$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles et de même signe, et où les quatre coefficients P_1 et P désignent des fonctions de x, y, z holomorphes pour le système de valeurs $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, les deux fonctions P_1 s'annulant en outre pour ce système de valeurs. Il est évident que l'une de ces deux fonctions peut être annulée identiquement ici comme dans les équations (9).

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles et de signes opposés, où les deux coefficients $P_1(x, y, z)$ désignent deux fonctions de x, y, z holomorphes et nulles pour le système de valeurs $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et où les deux coefficients $P(x, y, z)$ désignent encore des fonctions holomorphes pour le même système de valeurs.

Considérons une caractéristique aboutissant au point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Sur cette caractéristique, x et y finissent par ne plus s'annuler séparément, car par chaque point de la surface $x = 0$ par exemple, passe une caractéristique holomorphe aboutissant à un point de la ligne de cols $x = 0$, $y = 0$, et sur cette surface les points singuliers des équations (1) voisins de l'origine sont situés sur la ligne $x = 0$, $y = 0$. x et y finissent aussi par ne plus s'annuler simultanément. En effet, aux trois rapports (9) est encore égal le rapport

$$\frac{x\,dx - y\,dy}{\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 + \ldots}; \tag{10}$$

les termes du dénominateur suivant les deux termes $\lambda_1 x_2 - \lambda_2 y_2$ sont de degrés 3 au moins en x, y, z, et contiennent en facteur x^2, xy ou y^2. Sauf sur la ligne de cols $x = 0$, $y = 0$, ce dénominateur ne s'annule pas au voisinage de l'origine, puisque λ_1 et λ_2 sont de signes opposés. Sur un arc de caractéristique ne rencontrant pas, sauf peut-être en ses extrémités, la ligne $x = 0$, $y = 0$, la fonction $x^2 - y^2$ varie dans un sens constant et ne saurait s'annuler deux fois. D'ailleurs, la fonction $x^2 - y^2$ ne peut être identiquement nulle sans que sa différentielle, et par suite x et y, le soient aussi. Donc l'arc de caractéristique considéré finit par ne plus couper la ligne de cols $x = 0$, $y = 0$, et par conséquent x, y, dx, dy finissent par ne plus s'annuler ni l'un ni l'autre. Dès lors, les deux fonctions positives x^2 et y^2 devraient tendre vers zéro en variant dans des sens constants et différents l'un de l'autre d'après l'égalité des deux premiers rapports (9) : circonstance impossible.

Le raisonnement tombe en défaut si x ou y est identiquement nul. Si x est identiquement nul, mais non y, d'après l'égalité des deux derniers rapports (9), $\frac{dz}{dy}$ est une fonction de y et z holomorphe pour $y = 0$, $z = 0$. D'après le théorème de Cauchy, la fonction $z(y)$ est déterminée uniquement ; elle représente néces-

sairement la caractéristique holomorphe autre que la ligne de cols, située sur la surface $x = 0$. Ce qui démontre la proposition III.

7. Conservons les notations du n° 6, et admettons enfin que, sur une caractéristique, la distance d'un point à la ligne de cols $x = 0$, $y = 0$ tende vers zéro, sans que cette caractéristique aboutisse à un point déterminé de cette ligne. Appliquons les équations (9) à un arc de caractéristique où x et y sont arbitrairement petits, et où la variation totale de la fonction z n'est pas arbitrairement petite.

En égalant les trois rapports (9) au rapport (10), on voit que l'arc de caractéristique considéré ne peut couper plus d'une fois la ligne de cols $x = 0$, $y = 0$. Sur la totalité de cet arc, ou sur chacun des deux arcs partiels séparés par la ligne $x = 0$, $y = 0$, la fonction $x^2 - y^2$ varie dans un sens constant; dans les deux cas, on obtient au moins un arc qui ne coupe plus la ligne $x = 0$, $y = 0$, sur lequel la fonction $x^2 - y^2$ a un signe constant et varie dans un sens constant, et sur lequel la variation totale de z n'est pas arbitrairement petite.

Écrivons l'équation

$$\frac{[x\,\mathrm{P}(x, y, z) + y\,\mathrm{P}(x, y, z)]\sqrt{x^2 - y^2}}{\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 + \ldots} \times \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = dz,$$

si la fonction $x^2 - y^2$ est positive sur l'arc de caractéristique obtenu, et intégrons cette équation le long de cet arc. Le premier facteur du premier membre est encore borné : d'après le théorème de la moyenne, pour un segment quelconque de l'arc considéré, la variation totale de l'intégrale du premier membre, et par suite de la fonction z, est arbitrairement petite comme la variation totale de la fonction $\sqrt{x^2 - y^2}$, fonction qui varie dans un sens constant, et reste arbitrairement petite comme x et y. La variation totale de la fonction z est de même arbitrairement petite si la fonction $x^2 - y^2$ est négative sur l'arc considéré. Donc la fonction z tend nécessairement vers une limite comme x et y.

Ainsi la proposition IV est démontrée en ce qui concerne les lignes de cols.

1e P

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

APPELL (P.), Recteur de l'Université de Paris. — TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE. Tome IV : *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses particules.* Leçons publiées avec le concours de M. VÉRONNET, astronome à l'Observatoire de Strasbourg. 1 vol. in-8 de VI-297 pages avec 53 figures. Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1921.

Le monde des Mathématiciens et des Physiciens a certainement accueilli avec une faveur unanime le Tome IV du *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Appell. Ce nouveau volume est consacré exclusivement à l'étude des figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses particules. Cette délicate question, qui, après les recherches initiales de Maclaurin et de Jacobi, a donné lieu aux travaux célèbres de Liapounoff et de Poincaré, faisait l'objet de quelques brèves indications dans les premières éditions du Tome III du même Ouvrage. Ces indications ont été supprimées dans la dernière édition de ce Tome, et ce sont elles qui, systématiquement exposées et considérablement complétées, forment le point de départ de ce nouveau Volume.

Les deux premiers Chapitres présentent un exposé historique permettant de suivre le développement de cette question qui est du reste encore en pleine évolution, ainsi qu'une révision rapide et complète des propriétés indispensables de l'attraction et du potentiel. On retrouve, dans ce début de l'Ouvrage, toutes les qualités bien connues de l'auteur, qui réussit à condenser, sans sacrifier la rigueur, des théories difficiles à exposer et qui, sans être superficiel, atteint la plus grande clarté et une rare élégance.

Le Chapitre III est consacré à l'étude des figures ellipsoïdales d'équilibre dues à Maclaurin et à Jacobi. Les discussions des équations trouvées forment la partie essentielle de la question, elles sont souvent assez délicates et l'on sait qu'en particulier pour les ellipsoïdes à trois axes inégaux elles sont susceptibles

de revêtir différentes formes suivant qu'on prend comme paramètre la rotation de la masse fluide ou son moment de rotation. Ces différentes discussions sont exposées en détail et un progrès très net est fait dans le tracé des diverses courbes destinées à les éclairer. Ces courbes, dont les Mémoires fondamentaux ne donnaient souvent que l'allure générale, sont ici tracées avec une grande précision d'après des données numériques soigneusement contrôlées.

Pour pouvoir aller plus loin et aborder la question beaucoup plus complexe des figures d'équilibre non ellipsoïdales (ou tout au moins de celles de ces figures qui sont voisines des ellipsoïdes déjà trouvés), certains développements mathématiques sont nécessaires. L'auteur établit successivement dans les Chapitres suivants les équations fonctionnelles et les équations intégro-différentielles du problème, puis expose les principales propriétés des fonctions sphériques et des fonctions de Lamé. Ces Chapitres, qui présentent un grand intérêt, même en dehors du but précis pour lequel ils sont écrits, forment sans doute l'exposé à la fois le plus simple et le plus clair qui existe sur ces questions.

Avec le Chapitre VII, nous revenons au problème mentionné plus haut, c'est-à-dire à l'étude des figures d'équilibre voisines des ellipsoïdes. Les méthodes sont exposées d'abord de façon générale, et, à titre d'application, la discussion des figures ellipsoïdales est reprise au moyen des fonctions de Lamé. L'auteur aborde ensuite, d'après Poincaré, l'étude générale de la déformation susceptible de déduire de chaque ellipsoïde une nouvelle figure d'équilibre infiniment voisine. On sait que ce problème n'est possible qu'à partir de certains ellipsoïdes particuliers dits *ellipsoïdes de bifurcation*. L'étude en est faite d'abord sur les ellipsoïdes de Maclaurin et il y a lieu de signaler de façon spéciale une démonstration remarquablement simple de la détermination du premier ellipsoïde de bifurcation. La même question est ensuite traitée à partir des ellipsoïdes à axes inégaux de Jacobi; c'est elle qui a conduit à la célèbre figure piriforme de Poincaré, dont l'existence comme figure possible d'équilibre a causé un si grand étonnement. Le calcul précis des éléments des ellipsoïdes critiques et des figures de déformation voisines est alors conduit dans le détail et les résultats déjà connus sont condensés et com-

plétés par une détermination numérique précise des coefficients. L'une des plus grandes difficultés de ces calculs consiste dans la multiplicité des notations employées par les différents auteurs, multiplicité qui rend très pénible la lecture des Mémoires originaux. M. Appell expose clairement les rapports mutuels de ces notations et ce ne sera pas un des moindres services que pourra rendre ce Traité que de mettre de l'ordre dans un ensemble aussi complexe.

Enfin, un dernier Chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des figures d'équilibre. Ici encore, la question est loin d'être entièrement résolue et c'était une œuvre délicate que d'exposer systématiquement des résultats souvent disparates et qui même quelquefois ont pu paraître contradictoires. C'est ainsi que la stabilité de la figure piriforme, par exemple, a donné lieu à de nombreux débats, et que les résultats les plus divergents ont été obtenus, jusqu'à ce que Jeans tranche définitivement la question dans le sens de l'instabilité. On sait que la notion de stabilité elle-même dut être précisée et que Thomson et Tait ont introduit une distinction nouvelle et fondamentale entre la stabilité séculaire et la stabilité temporaire ou ordinaire. Le début du Chapitre consiste donc en une étude générale, fondamentale en elle-même, de la stabilité des systèmes. L'auteur expose ensuite les résultats remarquables que peuvent mettre en évidence les courbes d'équilibre relativement à l'échange des stabilités et applique les résultats en particulier aux ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi et aux figures voisines.

Cet exposé remarquablement complet d'une théorie encore en pleine évolution constitue une œuvre de premier plan, et il fallait certes, pour la mener à bien, unir, comme le fait M. Appell, une documentation étendue et un sens critique pénétrant à une remarquable facilité de l'exposition. Les passages les plus délicats paraissent clairs, les notations les plus compliquées ont l'air de se classer d'elles-mêmes et sans effort, et par ces qualités si personnelles de l'auteur, l'œuvre est une digne continuation du grand *Traité de Mécanique rationnelle* devenu aujourd'hui classique.

R. Thiry.

MORDELL (L.-J.). — THREE LECTURES ON FERMAT'S LAST THEOREM (TROIS CONFÉRENCES SUR LE DERNIER THÉORÈME DE FERMAT). (1 brochure in-8° 28 pages, *Cambridge University Press*, 1921.)

Cette petite brochure contient la matière de trois Conférences faites par l'Auteur en mars 1920 à Birkbeck Collège (Londres). Elle s'adresse aux personnes ayant une culture mathématique générale mais sans connaissances particulières en Théorie des Nombres. Elle n'a d'autres prétentions que de donner un aperçu des méthodes et l'énoncé des résultats; les démonstrations sont, en général, absentes. En voici l'analyse, à laquelle je me permets d'ajouter quelques notes.

ÉNONCÉ DU THÉORÈME. — *L'équation $x^n + y^n = z^n$ où n désigne un entier plus grand que 2 n'a pas de solutions entières en x, y, z, autres que les solutions banales où l'une des inconnues a la valeur zéro.*

Fermat possédait un exemplaire des œuvres de Diophante éditées par Bachelet. Il y inscrivait en marge les énoncés de théorèmes qu'il avait découverts et c'est ainsi qu'il nous a laissé celui dont nous parlons en ce moment. Il ajoute qu'il a trouvé une démonstration mais que la marge est trop petite pour la contenir (1).

Depuis, aucune démonstration complète n'a été découverte, bien que la question ait fait l'objet des recherches d'un très grand nombre de mathématiciens dont les plus grands, qu'elle ait été proposée plusieurs fois comme sujet de prix par les Académies de Paris et de Bruxelles, et qu'enfin, depuis 1907, elle fasse l'objet d'un prix spécial (2) de 100000 marcs.

Fermat a-t-il démontré son théorème? Il l'a cru évidemment, mais ne s'est-il pas trompé? Comment la démonstration qu'il

(1) « *Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi, hanc marginis exiguitas non caperet* » (1637).

(2) Prix Wolfskehl. La fondation de ce prix a donné naissance à un nombre énorme de « démonstrations » plus ou moins fantaisistes. Comme l'a dit M. Klein dans un rapport à ce sujet, le désir de gagner 100000 marcs est beaucoup plus répandu que les connaissances nécessaires pour aborder la question.

aurait pu donner à son époque (¹) n'aurait-elle pas été retrouvée depuis que la Science a fait de si grands progrès? C'était l'avis de Gauss (²), néanmoins Smith et M. Mordell pensent qu'il n'est pas impossible que Fermat possédât une démonstration.

Simplification du problème. — On peut se borner au cas où x, y, z sont premiers entre eux deux à deux et où n est égal à 4 ou à un nombre premier impair. Pour l'équation $x^2+y^2=z^2$ elle a des solutions non banales. M. Mordell les rappelle sans les démontrer (³).

(¹) Au temps de Fermat on savait résoudre en nombres entiers les équations du premier degré (encore la règle générale n'avait-elle pas été donnée explicitement). Pour le second degré on ne savait résoudre que des équations particulières. Le point de vue « fonction » qui avait déjà fait son apparition en Mathématiques était encore inutilisé en Théorie des Nombres. La théorie des groupes et celle des nombres algébriques n'étaient même pas soupçonnées.

(²) Et de Kronecker. L'une des propositions orales soutenues par lui pour l'obtention du titre de Docteur est : que Fermat n'a pas démontré son théorème. S'il nous est permis de donner notre avis après ceux de Gauss et de Kronecker, nous dirons que non seulement Fermat n'a pas démontré son théorème, mais qu'il n'y a actuellement aucune raison de croire qu'il soit vrai. (Non plus d'ailleurs qu'il n'y en a de croire qu'il soit faux.) Le fait qu'il a été démontré pour un grand nombre de valeurs de n ne prouve rien : car on forme facilement des énoncés vrais pour autant de valeurs que l'on veut d'un entier n et faux en général. (Exemple : n^2+n+41 *est premier pour tout entier n non divisible par* 41. Vrai pour $n<44$, faux pour $n=44$.)

(³) Voici probablement l'origine de cette question. La découverte du théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse (VIe siècle avant Jésus-Christ) avait bouleversé les idées des Grecs qui croyaient auparavant que deux longueurs quelconques sont commensurables. Elle leur donnait, en effet, une infinité de triangles rectangles dont l'hypoténuse est incommensurable avec un côté de l'angle droit. Il leur vint donc naturellement à l'esprit de chercher les triangles rectangles dont les trois côtés fussent commensurables, ce qui conduit immédiatement à l'équation en nombres entiers

$$x^2+y^2=z^2.$$

Le procédé employé pour résoudre cette équation, utile à connaître pour ce qui va suivre, car c'est le même qui a été essayé pour n quelconque, est le suivant. On écrit

$$x^2=(z+y)(z-y).$$

Or, y et z étant premiers entre eux ont pour plus grand commun diviseur 1 ou 2. Dans le premier cas, pour que leur produit soit un carré, il faut et il suffit que chacun d'eux le soit :

$$z+y=m^2, \qquad z-y=n^2,$$

d'où y et z. Le second cas se traite d'une façon analogue.

L'équation $x^4+y^4=z^4$. — Le cas de $n=4$ a ceci de remarquable qu'il est le seul où le théorème de Fermat a été démontré par des moyens élémentaires [1]. Cette démonstration est donnée [2].

L'équation $x^3+y^3=z^3$. — Cette équation a déjà été considérée par les Arabes vers le xe siècle. La première démonstration publiée est d'Euler. Elle est incomplète. Euler y est amené à résoudre en nombres entiers

$$p^2+3q^2=r^3.$$

Pour cela il pose

$$p+q\sqrt{-3}=(m+n\sqrt{-3})^3 \qquad (m,\ n \text{ entiers}),$$

c'est-à-dire

$$p=m^3-9mn^2, \qquad q=3m^2n-3n^3,$$

ce qui entraîne

$$p^2+3q^2=(m^2+3n^2)^3.$$

Or, il est bien évident qu'il obtient ainsi des solutions, mais il n'est pas sûr qu'il les obtienne toutes [3]. Ce fait (qui est d'ailleurs

---

(1) C'est-à-dire s'appuyant sur la théorie de la divisibilité des entiers telle qu'elle était connue d'Euclide et enseignée maintenant dans nos lycées. Déjà pour $n=3$ l'impossibilité de l'équation n'a pu être démontrée par de tels moyens, malgré de nombreux essais. Il a fallu nécessairement introduire dans la démonstration les nombres algébriques du corps $C(\sqrt{3})$, ou, ce qui revient au même, les formes quadratiques binaires de discriminant 3.

(2) Elle est de Frénicle de Bessy (1676) et s'applique à l'équation plus générale $x^4+y^4=z^2$. Elle consiste à raisonner comme pour $x^2+y^2=z^2$ et à démontrer que l'on pourrait, d'une solution non banale, en déduire une autre où les valeurs absolues des inconnues seraient plus petites et ainsi de suite. Or il est impossible de trouver des entiers positifs non nuls décroissant constamment.

Frénicle de Bessy tenait de Fermat le principe de sa démonstration. Cela résulte de sa correspondance avec lui et, d'ailleurs, Fermat nous a laissé, explicitement, la démonstration d'un théorème équivalent au précédent : *Il n'y a pas de triangle rectangle dont les côtés soient des entiers et la surface, un carré parfait.*

(3) On peut présenter la chose de la façon suivante : l'ensemble des nombres $p+q\sqrt{-3}$ (p, q entiers) jouit des propriétés suivantes, analogues aux propriétés de l'ensemble des entiers ordinaires : la somme, la différence, le produit de deux nombres de l'ensemble appartiennent à l'ensemble; il n'en est pas de même en général, du rapport de deux nombres de l'ensemble, c'est-à-dire qu'un nombre de l'ensemble n'est pas toujours *divisible* par un autre. Les nombres ± 1

exact) une fois démontré, le reste du raisonnement d'Euler serait valable.

Les équations $x^5 + y^5 = z^5$ *et* $x^7 + y^7 = z^7$. — Indications sur les solutions données par Lejeune-Dirichlet, Lamé, Lebesgue. Les moyens employés sont compliqués et particuliers.

L'œuvre de Kummer. — C'est la contribution la plus importante qui ait été apportée jusqu'à ce jour à la question. Kummer a réussi à démontrer le théorème de Fermat pour un grand nombre de valeurs de n. De plus, il a créé à cet effet la théorie des idéaux, qui joue maintenant un rôle fondamental en Mathématiques. Voici la marche qu'il a suivie :

On peut se borner, comme nous l'avons déjà dit, au cas où n est un nombre premier impair p. L'équation $x^p + y^p = z^p$ s'écrit

$$(x+y)(x+y\zeta)(x+y\zeta^2)\ldots(x+y\zeta^{p-1}) = z^p,$$

où ζ est une racine $p^{\text{ième}}$ imaginaire de l'unité.

---

divisent tous les autres et ce sont les seuls jouissant de cette propriété. On les appelle *unités*. Il y a des nombres α *indécomposables*, c'est-à-dire qui ne sont divisibles que par ± 1, $\pm \alpha$. Tout nombre de l'ensemble est décomposable en un produit de facteurs indécomposables. Mais il *n'est pas* vrai que cette décomposition ne soit possible que d'une seule manière (même en ne considérant pas comme distincts les facteurs α et $-\alpha$).

Par exemple,

$$2.2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}).$$

C'est ici que se rompt l'analogie avec les entiers ordinaires et c'est pourquoi le raisonnement d'Euler est insuffisant.

Euler a appliqué sa méthode dans d'autres cas, à des expressions $p^2 + cq^2$. Alors, non seulement le raisonnement est insuffisant, mais les résultats sont, en général, faux. D'ailleurs, Euler s'était bien aperçu lui-même de ce qui manquait à son raisonnement car il s'exprime, à un certain moment, de la façon suivante : « On *sent bien* que si la forme $x^2 + y^2$ a des facteurs réels il *faut bien* que les facteurs irrationnels $x + y\sqrt{-1}$ et $x - y\sqrt{-1}$ soient, eux-mêmes, composés d'autres facteurs ». Quand un mathématicien dit « on sent bien », c'est qu'il n'est pas très sûr de ce qu'il avance.

C'est Gauss qui, le premier, a démontré rigoureusement l'impossibilité de $x^3 + y^3 = z^3$. Il emploie, pour cela, non pas les nombres $p + q\sqrt{-3}$, mais les nombres $p + q\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, et il démontre que ces derniers ne sont décomposables que d'une façon en facteurs indécomposables.

Chacun des facteurs du premier membre est de la forme

$$x_0 + x_1\zeta + \ldots + x_{p-2}\zeta^{p-2} \quad (x_0, x_1, \ldots, x_{p-2} \text{ entiers ordinaires}).$$

Si l'on pouvait appliquer à ces expressions les règles de la divisibilité des entiers ordinaires (¹) et en particulier celle de la décomposition en facteurs premiers, on aurait une voie pour aborder le problème en opérant comme pour $n = 2, 3, 4$. On écrirait que les facteurs du premier membre, s'ils sont premiers entre eux deux à deux, sont chacun une puissance $p^{\text{ième}}$ parfaite. Mais cela n'est pas vrai en général. Cependant c'est vrai pour tous les $p < 23$. Ce fait explique pourquoi Lamé, Cauchy et Kummer lui-même, au début de ses recherches, avaient l'impression que cela était vrai en général (²).

Kummer a levé la difficulté par la considération des nombres idéaux.

Les nombres idéaux peuvent se définir de bien des manières. M. Mordell a choisi la définition la plus immédiatement accessible (³). Les idéaux sont des expressions de la forme

$$\sqrt[p]{x_0 + x_1\zeta + \ldots + x_{p-2}\zeta^{p-2}},$$

(¹) *Voir* la note précédente.

(²) Kummer avait même donné une démonstration du théorème de Fermat s'appuyant sur cette supposition erronée. C'est Lejeune-Dirichlet qui l'avertit : 1° que cette supposition avait, en tout cas, besoin d'une démonstration ; 2° qu'à son avis elle était fausse.

(³) Par contre, cette définition serait peu commode. Kummer a bien remarqué la possibilité d'une définition de cette sorte. Mais ce n'est pas celle qu'il a donnée. La façon dont il procède est bien plus ingénieuse et hardie. Elle consiste à dire qu'un nombre premier ordinaire, non réellement décomposable dans le domaine des entiers du corps $C(\zeta)$, l'est cependant en autant de facteurs *idéaux* qu'une certaine congruence a de racines. Chaque facteur idéal correspond à une solution de la congruence. On dit qu'un entier du corps est divisible par ce facteur idéal lorsque certaines congruences sont satisfaites. De la décomposition des nombres premiers ordinaires résulte celle de tous les entiers du corps. Kummer nous dit que cette conception lui fut suggérée par celle du radical hypothétique ammonium imaginé en Chimie pour expliquer les propriétés basiques de l'ammoniaque. Curieux exemple de l'influence, l'une sur l'autre, de deux sciences aussi éloignées en apparence, que la Théorie des Nombres et la Chimie.

D'ailleurs, la méthode de Kummer n'est pas absolument rigoureuse, mais on peut la rendre telle en s'appuyant, par exemple, sur la théorie des congruences à double module de Kronecker.

Les procédés actuels de la Théorie des Nombres donnent des voies plus rapides, peut-être moins claires, pour arriver aux mêmes résultats.

les entiers x étant assujettis à certaines conditions, r étant un entier, le *nombre des classes*, dont la valeur dépend de p. En adjoignant ces nombres idéaux aux nombres entiers du corps $C(\zeta)$ les lois de la divisibilité ordinaire se trouvent rétablies.

Ceci fait, il est relativement simple d'appliquer à $x^p + y^p = z^p$ le procédé employé pour $x^3 + y^3 = z^3$, *si le nombre des classes n'est pas divisible par p.*

Pour les valeurs de p satisfaisant à cette condition, Kummer a ainsi démontré l'impossibilité de l'équation non seulement en entiers ordinaires, mais même en entiers du corps $C(\zeta)$, c'est-à-dire qu'il a démontré un théorème plus général que celui de Fermat [1].

La condition que r n'est pas divisible par p peut se remplacer par une autre. Posons

$$\frac{x\varkappa}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n x^{2n}}{(2n)!},$$

de sorte que

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}, \qquad B_3 = \frac{1}{42} \quad [2],$$

ces nombres sont dits : *nombres de Bernoulli.*

Alors la condition peut s'énoncer que : *Aucun des $\frac{p-3}{2}$ premiers nombres de Bernoulli n'ait son numérateur divisible par p.*

Cette condition est remplie pour toutes les valeurs de p inférieures à 100, sauf pour $p = 37$, 59 et 67.

Kummer chercha à combler cette lacune. En 1857 il donna une méthode s'appliquant aux nombres premiers satisfaisant à certaines

---

(1) Le travail définitif de Kummer est de 1850.

On a aussi étudié l'équation $x^p + y^p = z^p$ dans des corps différents de $C(\zeta)$, par exemple dans des corps quadratiques (Fueter, Burnside).

(2) On trouve ensuite

$$B_4 = \frac{1}{30}, \qquad B_5 = \frac{5}{66}, \qquad B_6 = \frac{691}{2730}, \qquad B_7 = \frac{7}{6}, \qquad B_8 = \frac{3617}{510}.$$

Je donne ces valeurs pour montrer combien les numérateurs dont il est question ici ont une marche irrégulière.

conditions autres que les précédentes [1], lesquelles conditions s'appliquent justement à 37, 59 et 67. Mais, il résulte des recherches de M. Vandiver, que les démonstrations de Kummer ne sont pas à l'abri de toute critique. Pour le cas de $p = 37$, une démonstration rigoureuse a été donnée par M. Mirimanoff.

Autres résultats [2]. — Kummer a aussi démontré que *l'équation $x^p + y^p = z^p$ ne peut avoir des solutions en entiers ordinaires dont aucun ne soit divisible par p, que si les numérateurs de $B_{\frac{p-3}{2}}$ et $B_{\frac{p-5}{2}}$ sont divisibles par p.*

M. Mirimanoff a étendu ce résultat à $B_{\frac{p-7}{2}}$ et $B_{\frac{p-9}{2}}$, et démontré d'autres résultats du même genre.

Les congruences $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, etc. — Voici des conditions d'un autre genre. M. Wieferich [3] a démontré qu'il n'existe pas de solutions dont aucune ne soit divisible par p lorsqu'on n'a pas

$$2^{p-1} \equiv 1 \qquad (\bmod\, p^2),$$

M. Mirimanoff a ensuite donné la condition analogue

$$3^{p-1} \equiv 1 \qquad (\bmod\, p^2),$$

M. Vandiver la condition

$$5^{p-1} \equiv 1 \qquad (\bmod\, p^2),$$

M. Frobenius les conditions

$$11^{p-1} \equiv 1, \qquad 17^{p-1} \equiv 1$$

et

$$7^{p-1} \equiv 1, \qquad 13^{p-1} \equiv 1, \qquad 19^{p-1} \equiv 1,$$

ces dernières, si $p \equiv -1 \pmod 6$; toutes ces congruences étant $(\bmod\, p^2)$.

Voici des conditions d'un autre genre encore.

---

(1) Dans ce cas, la démonstration ne s'applique pas à tous les entiers du corps $C(\zeta)$, mais seulement à certains d'entre eux, en particulier aux entiers ordinaires.

(2) Ces résultats se rapportent à un énoncé donné précédemment par Sophie Germain (*voir* plus loin).

(3) En 1909.

On démontre facilement que si $x^3+y^3=z^3$, l'un des trois entiers x, y, z doit être divisible par 3, de même par 7. Si l'on pouvait trouver une infinité de nombres premiers q tel que $x^3+y^3=z^3$ entraînât que l'un des entiers x, y, z dût être divisible par q, cela démontrerait l'impossibilité de l'équation. De même pour $x^p+y^p=z^p$.

Or, Libri, en 1832, énonça qu'il n'y *a pas* une infinité de tels nombres premiers. Ceci fut prouvé en 1886 par Pellet, puis, de nouveau en 1909, par Dickson et Hurwitz. Donc impossibilité d'atteindre la solution par cette voie.

Résultats de Sophie Germain. — On a vu plus haut des cas nombreux d'impossibilité de $x^p+y^p=z^p$ en entiers dont aucun n'est divisible par p. C'est Sophie Germain qui a, la première, examiné cette question d'une façon méthodique. Elle a démontré cette impossibilité dans le cas où l'on peut trouver un nombre premier q satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $x^p+y^p=z^p \pmod{q}$ ne peut être satisfaite que si l'un des entiers x, y, z est divisible par q ;

2° La congruence

$$k^p=p \pmod{q}$$

n'a pas de solution.

Puis elle a calculé pour tout nombre premier $p<1000$ un nombre q satisfaisant ces conditions.

Wundt a simplifié l'énoncé de ces conditions, et Dickson, en s'appuyant sur ces résultats, a démontré le théorème de Sophie Germain pour $p<7000$.

Tels sont, à peu de chose près, les renseignements donnés par M. Mordell ; ils comprennent bien, en somme, l'essentiel de ce qui a été fait sur la question.

On est tenté de leur faire le reproche suivant : l'étendue des renseignements donnés sur les différents travaux n'est pas proportionnée à leur importance. Les travaux les plus importants sont ceux qui procèdent de la théorie des nombres algébriques, seuls ils ont permis de résoudre le problème pour certaines valeurs de n. Les autres n'ont jamais pu y réussir que dans les cas simples des deuxième et quatrième puissances. Or, c'est sur ces derniers que M. Mordell s'étend le plus.

Mais il faut avouer que ce reproche était bien difficile à éviter. Il est à peu près impossible de donner une idée claire des travaux du premier genre sans entrer dans de longs détails, tandis que cela est facile pour les autres.

En tout cas, nous croyons que le lecteur emportera de la brochure de M. Mordell l'impression bien nette que, jusqu'à maintenant, on ne s'est pas avancé bien loin dans la solution du problème *général* de Fermat. Ce problème a, en somme, été résolu pour *certaines* valeurs de n, satisfaisant à *certaines* conditions. Ces conditions sont que certaines coïncidences numériques compliquées *n'aient pas lieu*. On conçoit que cela puisse arriver très souvent sans qu'on puisse en inférer que cela arrive toujours. D'ailleurs ces conditions sont *suffisantes* pour que le théorème de Fermat soit vrai mais non nécessaires; de sorte que lorsqu'elles ne sont pas remplies on ne sait rien.

Il paraît aussi bien difficile de trouver par tâtonnements des valeurs satisfaisant à une équation de Fermat et de démontrer ainsi, par le fait, la possibilité de sa résolution.

Il existe, en effet, des théorèmes dont M. Mordell ne parle pas, mais qui nous paraissent intéressants à ce point de vue, qui limitent inférieurement les valeurs de x, y, z qui pourraient satisfaire à $x^n + y^n = z^n$. Le plus simple est celui de Grünert :

Les valeurs positives de x, y, z satisfaisant à $x^n + y^n = z^n$ sont toutes plus grandes que n [1].

De sorte que pour $n = 59$ premier cas douteux, le plus petit nombre à essayer serait 60. Or $(60)^{59}$ a 105 chiffres.

Le problème de Fermat ne semble, en définitive, pas plus près de sa solution que celui des nombres parfaits, celui de

---

[1] *Démonstration.* — Posons $z = x + u\,(u > 0)$ et remplaçons dans l'équation, il vient après réduction

$$y^n = n x^{n-1} u + \ldots,$$

d'où

$$y^n > n x^{n-1}.$$

De même

$$x^n > n y^{n-1}.$$

Élevons la première inégalité à la puissance n, remplaçons x^n par $n y^{n-1}$, on trouve facilement

$$y > n.$$

De même x.

Goldbach, etc., toutes questions dont l'énoncé est si simple qu'elles se sont posées depuis des siècles, et la solution si difficile qu'on ne voit même pas encore comment on pourrait y arriver.

Dans ces conditions, on peut se demander et beaucoup se demandent, en effet, si c'est bien la peine de poursuivre plus longtemps des solutions qui paraissent encore si loin d'être atteintes, lorsque, de plus, les questions posées sont d'une nature si particulière et d'un intérêt pratique évidemment nul.

Que les questions soient particulières, c'est évident; qu'il vaudrait mieux, par exemple, au lieu de l'équation $x^n + y^n = z^n$, étudier l'équation $f(x, y, z) = 0$, c'est certain. Mais, comme étudier l'équation $f(x, y, z) = 0$ n'est pas possible pour le moment, on étudie l'équation de Fermat comme préparation à ce problème plus général.

L'intérêt pratique de tous ces problèmes est nul. On ne leur voit pas d'application, non seulement d'applications pratiques immédiates, mais même d'application à toute autre partie de la Science. Mais, d'abord, chacun sait que des théories ont semblé complètement inutiles pendant longtemps qui, à un moment donné, ont reçu une application.

Lorsqu'en 1881 l'Académie des Sciences de Paris mettait au concours le problème de la décomposition des nombres entiers en une somme de cinq carrés elle fournissait à Minkowski, qui obtint le prix, l'occasion de commencer ses recherches sur les formes quadratiques et leurs substitutions automorphes. Par là elle contribuait peut-être indirectement aux progrès de l'Électricité, de l'Optique et de toute la Mécanique, puisque le même Minkowski a découvert, depuis, le rapport intime qu'il y a entre cette théorie des substitutions automorphes et celle de la relativité de Lorenz-Einstein.

Et puis, il y a d'autres raisons que celle de l'utilité : « Le savant, a dit Poincaré, n'étudie pas la nature parce que cela est utile, mais parce qu'il y prend plaisir. » Et Leibnitz : « Mais à quoi bon cela, dira-t-on. Je réponds : à perfectionner l'art d'inventer. Car il faudrait avoir des méthodes pour venir à bout de tout ce qui peut se trouver par raison. »

E. Cahen.

ANNUAIRE POUR L'AN 1921, *publié par le Bureau des Longitudes*. Avec des Notices scientifiques : 1° *Les mouvements propres et les vitesses radiales des étoiles*, par G. BIGOURDAN (p. A.1-A.40); 2° *Notice sur le général Bassot*, par le général BOURGEOIS (p. B.1-B.17). 1 vol. in-16 de VIII-840 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921.

Le Bureau des Longitudes fut institué par la Convention nationale (loi du 25 juin 1795) en vue du perfectionnement des diverses branches de la science astronomique et de leurs applications à la géographie, à la navigation et à la physique du globe.

Il rédige et publie : 1° la *Connaissance des Temps;* 2° des *Éphémérides nautiques;* 3° un *Annuaire* qui, aux termes du réglement donné par la Convention, doit être « propre à régler ceux de toute la République »; 4° des *Annales*.

Cet *Annuaire* parut pour la première fois en 1796 et s'est publié depuis chaque année sans interruption. Comme le signale l'avertissement, l'*Annuaire* pour 1921 contient, ainsi que *dorénavant tous les Annuaires*, d'abord quatre Chapitres relatifs : le premier au *Calendrier*, le deuxième à la *Terre*, le troisième à l'*Astronomie* et le quatrième aux *Mesures légales* et aux *Monnaies*. Dans le deuxième Chapitre (*Terre*), on a groupé, depuis l'année 1919, avec les matières qui y étaient contenues habituellement, les données relatives à la Météorologie, à la Réfraction atmosphérique et au Magnétisme terrestre. De plus, *tous les Annuaires* renfermeront un cinquième et dernier Chapitre qui sera relatif, pour ceux des années paires, aux *Données physiques et chimiques*, et, pour ceux des années impaires, aux *Données géographiques, Statistiques démographiques, Tables de survie, d'annuités, d'intérêt et d'amortissement*.

Toutes les Tables des matières étant désormais groupées à la fin du Volume (sauf celles qui sont particulières aux Notices), et fournissant l'indication des sujets et des renseignements contenus non seulement dans le présent *Annuaire* mais encore dans les cinq *Annuaires* immédiatement précédents, on trouve aisément tout ce que l'on peut désirer connaître.

Presque aussitôt après son apparition, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, qui contenait alors 80 pages, ayant été accueilli avec faveur, on étendit les articles qu'il contenait, on en ajouta de

nouveaux, et l'usage des Notices s'introduisit. Ces Notices portaient sur les Découvertes géographiques récentes, sur la Géodésie française, le Système métrique, etc. De 1810 à 1827, l'*Annuaire* contint des extraits des Œuvres de Laplace. De 1824 à 1853, il contint la longue série des Notices écrites par Arago qui contribuèrent si puissamment à la popularité de ce petit Ouvrage.

Après la mort de ce dernier, l'Annuaire ayant été publié sans Notices pendant dix années, le public réclama ce complément si intéressant. Delaunay reprit, en 1865, la publication des Notices qui depuis ne s'est plus interrompue.

Les Notices contenues dans l'*Annuaire* de 1921 sont dues l'une à M. Bigourdan et est relative à l'Astronomie, l'autre au général Bourgeois. Cette dernière, bien que consacrée à la mémoire du général Bassot, appartient à l'histoire de la Géodésie française.

La Notice de M. Bigourdan sur *Les mouvements propres et les vitesses radiales des étoiles* a pour but de relater les extraordinaires progrès de l'Astronomie au XIXe siècle, qui est « le siècle des mouvements propres » et, plus récemment encore, dans le dernier demi-siècle où, grâce à l'application que l'on sut faire de la spectroscopie et du parti que l'on sut tirer des analogies entre le son et la lumière, les astronomes ont pu attaquer le problème, regardé longtemps comme à jamais insoluble, de la composition chimique des astres.

Après quelques considérations préliminaires sur les moyens employés par l'homme pour étudier l'univers sidéral, depuis le simple examen à l'œil nu jusqu'aux observations faites à l'aide des savants instruments de nos jours, il jette un regard sur l'Astronomie primitive et insiste sur les données astronomiques que les anciens nous ont légnées. Il indique en passant ce que cette science astronomique renfermait en puissance concernant l'Astronomie physique : les Lois de Képler et celle de Newton se révélant être à la fois et le couronnement de la science ancienne et le point de départ de toute la science astronomique actuelle.

Ce premier Chapitre terminé, M. Bigourdan aborde la première partie de sa Notice : *Les mouvements propres des étoiles*. Il fait l'historique de la découverte de ces mouvements en trois petits paragraphes qui ont respectivement pour titres : *Premiers essais;*

Confirmation au XVIIIe *siècle; Établissement définitif de l'existence des mouvements propres.* Dans le premier paragraphe c'est le nom célèbre de Halley qu'il présente; dans le second, ce sont ceux de Tycho Brahé et de Cassini II et ceux, moins connus de la foule, de T. Mayer et de Maskelyne. Dans le troisième ce sont ceux de Bradley, Lacaille, Lalande, Bessel, etc. L'aboutissement de tous ces travaux est l'entreprise du « Grand Catalogue photographique international » commencé en 1887 sous l'impulsion de l'Observatoire de Paris.

Le quatrième paragraphe : *Utilisation des mesures différentielles*, montre comment, après avoir entrepris un Catalogue général, on put rapidement songer à établir des Catalogues spéciaux de mouvements propres.

Le cinquième paragraphe est consacré aux *Catalogues spéciaux de mouvements propres.* A l'occasion des procédés employés pour reconnaître et mesurer les mouvements propres, M. Bigourdan définit le mouvement propre angulaire, donne la notion de mouvements propres parallèles et de courants stellaires.

Puis, il envisage dans un sixième paragraphe l'*Insuffisance des mouvements propres angulaires* pour donner les mouvements réels des astres dans l'espace. Ici intervient la notion de *vitesse radiale.*

M. Bigourdan abordera le sujet de ces vitesses radiales au Chapitre IV, le Chapitre III étant réservé à un exposé élémentaire indispensable de spectroscopie, avec : *le Prisme; Raies du spectre; Classification spectrale des étoiles.*

Au Chapitre IV, le premier paragraphe est consacré à la définition de la *vitesse radiale;* les quatre paragraphes suivants sont écrits en vue de faire comprendre au lecteur comment s'interprètent, pour les vitesses radiales, les photographies spectrales des étoiles. L'étoile et l'observateur étant en mouvement relatif, un déplacement des raies dans le spectre indique un changement de longueur d'onde.

Un sixième paragraphe montre les services indispensables que rend la photographie dans la détermination des vitesses radiales.

Enfin, M. Bigourdan, abordant la deuxième partie du Chapitre IV : *Étoiles doubles spectroscopiques*, termine son exposé par la relation d'un phénomène d'éloignement et de rapprochement

de l'observateur remarqué pour certaines étoiles; phénomène qui a permis de découvrir une nouvelle catégorie d'étoiles doubles : les *étoiles doubles spectroscopiques*.

Au cours de sa Notice, M. Bigourdan renvoie souvent aux Tableaux relatifs à la question, donnés par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, surtout par l'*Annuaire* pour l'an 1917.

La Notice écrite par le général Bourgeois sur son collègue décédé en 1916, le général Bassot, retrace comme nous l'avons dit, à l'occasion de la carrière de géodésien du général Bassot, l'histoire de la Géodésie en France dans le siècle dernier, où la géodésie française, après une période glorieuse, connut un instant de déchéance au regard des autres nations et reprit à partir de 1870 une place d'honneur parmi ses rivales.

A ce titre, cette Notice intéressera vivement les lecteurs de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Le général Bassot eut à participer en effet, en vue de la mesure du grand arc anglo-franco-espagnol; d'une part à la nouvelle mesure de la « Méridienne de France », nécessitée par la jonction faite en 1861 de la triangulation anglaise à la célèbre triangulation de Méchain et Delambre; d'autre part à l'audacieuse et grandiose entreprise de la jonction géodésique de l'Algérie avec l'Espagne; et enfin au prolongement de la méridienne ainsi développée jusqu'aux confins du désert algérien.

Les lecteurs pourront apprécier quelle part importante revient dans ces grandes et difficultueuses opérations de triangulation au général Bassot, soit alors qu'il travaillait sous la direction du général Perrier, soit après 1888, date de la mort du général Perrier, lorsqu'il était secondé par des collaborateurs qu'il avait lui-même formés.

L'activité du général Bassot ne fut pas tout entière absorbée par ces travaux. Pendant la période où ces opérations s'exécutaient, on trouve Bassot, dès 1872, parmi les délégués de l'Association géodésique internationale, dont il deviendra plus tard Président; on le trouve encore, en 1881, parmi les membres d'une Mission envoyée par l'Académie des Sciences observer en Amérique le passage de Vénus sur le Soleil; on le voit après 1888 travailler à des triangulations de premier et de second ordre en Algérie et en

Tunisie, puis en 1898 guider la triangulation de l'arc méridien de Quito dont la mesure avait été confiée à la France. C'est dire le renom que les géodésiens français et le général Bassot s'étaient acquis parmi les autres nations.

Aussi n'est-on pas étonné de constater, au cours de la Notice, la rapide élévation scientifique du général Bassot.

Sorti de l'École Polytechnique en 1863, il est, en 1875, correspondant du Bureau des Longitudes; en 1886, lauréat de l'Académie des Sciences qui lui décerne le prix Lalande; en 1893, membre de l'Académie des Sciences; en 1896, membre titulaire du Bureau des Longitudes.

En 1903, l'Académie des Sciences le désigne pour diriger l'Observatoire de Nice. Ses titres à ce poste étaient sérieux : c'est à ce parfait administrateur que l'on devait les jonctions astronomiques de notre Observatoire fondamental avec les Observatoires fondamentaux étrangers.

Le Ministère de la Guerre ne lui était pas moins reconnaissant de ses services : en 1888, il le nomma directeur du Service Géographique de l'Armée, et en 1899, il l'éleva au grade de général de brigade.

Comme le fait remarquer l'auteur de la Notice, la guerre que nous venons d'avoir à soutenir a montré combien les hommes tels que le général Bassot sont utiles pour maintenir le bon renom de nos géodésiens, mais aussi pour travailler au salut de la Patrie.

ERNEST LEBON.

BOUSSINESQ (J.), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES. Paris, Gauthier-Villars, t. I, 1901; t. II, 1903; t. III, 1921.

1. M. J. Boussinesq vient d'achever la publication des leçons de Physique mathématique qu'il a professées avec un zèle infatigable depuis une trentaine d'années à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. Tous ceux qui ont eu le soin de lire, ou quelquefois de parcourir, les Notes étendues que M. Boussinesq a

données aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pendant cette longue période savent avec quelle persévérance, avec quelle ténacité, sans se soucier des variations du langage, M. Boussinesq a poursuivi l'étude des problèmes importants et difficiles posés mais non résolus par les grands géomètres du début du XIXe siècle. M. Boussinesq est leur fils intellectuel direct; ce sont les méthodes analytiques de Laplace, Poisson, Cauchy, Fourier, qui lui suffisent; presque sans emprunts aux travaux modernes des mathématiciens ni à leur langage, M. Boussinesq aborde et résout des questions précises, et les mène habilement, comme il l'avait déjà fait dans son monumental Mémoire sur les eaux courantes, jusqu'aux résultats numériques. Sans être indifférent aux démonstrations générales d'existence qui ont absorbé une si grande partie de l'activité des mathématiciens du XIXe siècle, M. Boussinesq pense en effet, comme beaucoup de physiciens, qu'on prouve aussi l'existence d'une solution en la trouvant dans un nombre suffisant de cas particuliers, et c'est surtout à cette recherche positive qu'il a consacré tous ses efforts. Bien entendu, il faut se garder d'exagérer la valeur de ce genre de preuve, ou plutôt, de formation d'une conviction; il arrive en effet trop souvent que nous sommes impuissants à traiter rigoureusement un problème particulier, et même à apprécier du point de vue purement mathématique le degré d'approximation de la solution que nous obtenons; en toute logique, les solutions de problèmes particuliers ne fournissent aucune indication sûre relativement aux généralisations raisonnables; il y faut une appréciation fine et une sorte d'intuition dont M. Boussinesq a souvent donné l'exemple.

2. Dans les 1200 pages de ces trois gros Volumes, M. Boussinesq aborde et traite un bien plus grand nombre de questions, et plus variées, que ne le donnait à penser leur titre primitif.

Les deux premiers Volumes, parus en 1901 et 1903, avaient pour titre général :

Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière.

Déjà les théories générales de l'Optique y tenaient autant de place que la théorie de la Conductibilité de la chaleur.

Le troisième Volume, qui vient de paraître (1921) est constitué par deux parties très distinctes; la première partie, *Compléments aux théories de la chaleur, de la lumière, etc.*, est encore de la physique mathématique proprement dite. La seconde moitié (p. 227-417) de ce Volume est philosophique, et échappe à notre compétence; c'est le développement des idées émises il y a longtemps déjà par M. Boussinesq, au sujet de ce problème toujours angoissant du conflit (M. Boussinesq dit de la conciliation) entre la liberté et le déterminisme. Je laisse la parole à l'auteur :

« Les trois dernières parties (du Volume) sont consacrées à la Philosophie naturelle, et peuvent être regardées comme le fruit de 50 ans de méditations de l'auteur sur les principes de la mécanique physique ou réelle, ces principes qui ont rendu possible, depuis (maintenant) près de trois siècles, l'application de l'analyse infinitésimale à la représentation et au calcul des phénomènes du Monde extérieur ou Univers visible. Ils font directement l'objet de la quatrième partie, intitulée *Réflexions et recherches sur les bases et la philosophie de la mécanique*. Le titre de la cinquième est *Sur le problème mécanique de l'organisme animé et des pouvoirs directeurs* (*vie et volonté*); celui de la sixième : *Sur la loi de simplicité, comme indispensable principe directeur de l'esprit dans l'édification des Sciences*.

« Un coup d'œil jeté sur la même Table des matières suffira pour montrer le puissant intérêt de ces trois Parties, et leurs résultats possibles, tant pour l'éducation de l'esprit que pour l'acquisition de l'état habituel de paix intellectuelle convenant, vers le soir de leur vie, aux hommes d'étude dont la vocation a été, dès leur première jeunesse, le culte du vrai. Je me contenterai ici d'ajouter un mot sur le sujet de la cinquième partie, parce qu'il se trouve abordé pour la première fois (à ma connaissance) dans un Cours de sciences, surtout ayant un caractère mathématique. On voit qu'il s'y agit des principes d'action dont le rôle est de déterminer ou de *décrocher* (pour ainsi dire) des séries de phénomènes non inclus dans l'effet des forces mécaniques y figurant, ou dans les équations différentielles, cependant obéies, du mouvement des systèmes matériels en présence : rôle dès lors *initiateur* et capital, seul propre à introduire, *naturellement*, des éléments

nouveaux, du *contingent*, dans la trame des faits perceptibles à nos sens. » (Préface du IIIe volume, p. VI-VII.)

Ce n'est pas en quelques lignes qu'on peut se permettre d'exposer et de discuter de semblables aperçus; on ne peut que conseiller aux lecteurs préoccupés des mêmes problèmes philosophiques, la lecture respectueuse de ces pages, résultat de toute une vie de méditation, et souhaiter que quelques-uns au moins y découvrent la source de l'heureuse sérénité dont jouit évidemment leur auteur.

3. Revenons à la partie mathématique de ces Leçons.

A l'exception de l'électromagnétisme, presque toutes les questions de Physique mathématique sont traitées au cours de ces Leçons; mais il ne sera pas toujours facile au lecteur d'y trouver tout ce qu'elles contiennent, même en usant des Tables détaillées de chacun des Volumes. M. Boussinesq a toujours présentes à l'esprit toutes les questions auxquelles il a réfléchi durant sa longue vie scientifique. Lorsqu'il avance dans l'exposition d'un sujet, tous les sujets différents qui ont quelque affinité avec le premier, soit par les principes physiques qu'ils précisent, soit par les méthodes analytiques générales qu'ils mettent en jeu, soit même par les artifices de calcul qui permettent d'éluder une grosse difficulté apparente, le hantent et le harcèlent à la fois.

De là résultent des Notes, ou des digressions de plus en plus étendues à mesure qu'on avance dans le Volume; et l'on peut dire que rien n'est plus instructif pour l'étudiant qui débute dans l'étude de la Physique mathématique que la constatation de ces liens intimes entre sujets en apparence très éloignés. Mais cela ne va pas sans quelques inconvénients au point de vue de la composition apparente du Livre. Les sujets s'enchaînent; peu à peu le sujet principal du début cède le pas à l'un des sujets amorcés dans les Notes; et un nouveau traité se développe et finit par occuper la place principale à la fin du volume. Cette manière large et puissante de tout enchaîner n'est peut-être pas très facile à suivre pour un débutant; elle oblige à lire attentivement tout l'Ouvrage; elle rend à peu près impossible d'y retrouver rapidement un renseignement précis qu'on sait y avoir lu. C'est ainsi que l'Ouvrage

commencé comme un traité de conductibilité pour la chaleur, en faisant appel pour justifier les hypothèses de Fourier, aux théories thermodynamiques et à celles de la propagation des ondulations, devient dès le premier tiers du deuxième Volume un traité théorique *très complet* d'optique ondulatoire des milieux isotropes ou anisotropes, transparents ou absorbants, en repos ou en mouvement, etc., écrit au point de vue des théories mécaniques. (Note II, p. 267 à 625.)

L'emploi du langage mécanique déroutera aussi les débutants, qui maintenant n'emploient que le langage électromagnétique, sans se douter que dans les neuf dixièmes de l'optique les mots seuls diffèrent, mais que les équations et les raisonnements mathématiques sont les mêmes.

Enfin la moitié du troisième Volume est entièrement composée de Chapitres dont chacun porte comme titre « Complément au Chapitre I, ou II, ... de la théorie de la chaleur, ou de la théorie de la lumière ». Toute difficulté ainsi laissée en suspens il y a quinze ans est discutée à nouveau, et le plus souvent résolue, soit par une vue physique plus profonde des approximations légitimes, soit par une heureuse adaptation des méthodes de recherche des solutions *asymptotiques*, que les jeunes gens croient d'invention récente parce que leur baptême, et leur étude théorique un peu fine, ne remontent pas très loin, mais dont les exemples d'usage courant sont dus à Fourier, à Laplace et aux grands mathématiciens du XVIIIe siècle.

4. Rien n'est plus éloigné de la manière menue, étroite et sectionnée du manuel préparatoire à un examen ou à un concours que le style large, à flots puissants et ininterrompus, de M. Boussinesq. Toute question est d'abord considérée sous son aspect le plus général; la mise en équations est faite d'abord sans approximations, autant du moins que cela est possible en passant du concret à l'abstrait. Puis, par des descriptions imagées du phénomène à étudier, M. Boussinesq convainc son lecteur qu'il peut, sans altérer le résultat numérique final d'une manière appréciable, effacer un terme, puis un autre, dans une des équations aux dérivées partielles, mais qu'il doit conserver le terme correspondant dans une autre, et, peu à peu, sans employer les phrases

cabalistiques qui donnent une apparente rigueur aux conséquences d'une hypothèse précise qu'on a négligé de justifier, M. Boussinesq arrive à formuler le problème de manière qu'il puisse être traité, et qu'on sache à quelles conditions physiques concrètes il est raisonnable de considérer la solution mathématique comme comparable aux faits expérimentaux. C'est un art dont M. Boussinesq avait donné d'admirables exemples dans ses travaux d'hydraulique théorique et qu'il a encore appliqué de la manière la plus heureuse, non seulement à élucider de nombreux points délicats de la théorie de l'élasticité et de celle de la lumière, mais encore à annexer à la Physique mathématique tout un ensemble de questions, pratiquement importantes, que personne avant lui n'avait su aborder; je veux parler des échanges par convection entre un solide et un courant gazeux, ou *pouvoir refroidissant des fluides*, sujet entièrement nouveau et qui forme la partie vraiment originale de ce Cours de Physique mathématique.

5. Insistons donc, comme il convient, sur ces très beaux travaux de M. Boussinesq et de quelques-uns de ses élèves. Les Leçons XXXIV et XXXV du second Volume (1903), et ensuite les Chapitres V à IX du troisième Volume (1921) traitent des pertes de chaleur par convection dans un fluide peu conducteur, pesant, en repos à grande distance, ou par un courant fluide assez rapide, uniforme à grande distance. C'est en 1901, je crois, que M. Boussinesq avait abordé pour la première fois ce double sujet difficile, dans deux Notes aux *Comptes rendus* que le *Journal de Physique* a reproduites *in extenso* (1902). L'exposé qui se trouve dans le second Volume est essentiellement le même, mais avec un peu plus de développements et d'explications.

Ce qui a permis à M. Boussinesq d'obtenir des équations sur lesquelles on peut reconnaître d'importants résultats généraux, c'est une remarque extrêmement simple, qui semble d'abord restreindre la généralité du problème posé, mais qui, en réalité, ne le restreint que comme font les conditions physiques générales nécessaires pour que le phénomène étudié soit simple et bien défini. Lorsqu'un liquide, ou même un gaz, *pesant*, se met en mouvement au voisinage d'un corps chaud, bien que les inégalités de densité dues à la présence du corps chaud soient la cause effective du

mouvement, par l'intermédiaire de la pesanteur, ces inégalités influent très peu sur la distribution des lignes de flux. En d'autres termes, on peut conserver l'équation d'incompressibilité comme équation cinématique, à condition d'écrire néanmoins dans les trois équations dynamiques l'existence d'une force motrice descendante proportionnelle à l'excès de la température de l'élément de volume sur celle des points éloignés. L'autre remarque importante, c'est que par un choix d'unités convenable pour toutes les grandeurs dont dépend le problème, on peut donner aux équations une forme canonique, à coefficients purement numériques.

Dans le second problème, celui du refroidissement par un courant continu uniforme au loin, M. Boussinesq n'a pas été moins heureux. Pourvu que les corps ne soient pas trop petits, et que le liquide ou le gaz soient très peu conducteurs, les inégalités de densité n'ont qu'une influence inappréciable sur la distribution du flux, le courant de fluide autour de l'obstacle est pratiquement le même que si la température du fluide ne différait pas de celle de l'obstacle. Tout le problème cinématique peut donc être séparé du problème thermique. Ce dernier prend une forme très simple si le courant fluide est permanent, et surtout lorsque la variation de température dans le sens normal à la paroi est beaucoup plus rapide que dans le sens tangentiel. Pour un obstacle plan, léché par un courant rectiligne uniforme parallèle au plan, la solution devient particulièrement simple, et se déduit de la solution bien connue de l'état variable du mur. Dans le troisième Volume, M. Boussinesq montre que la même intégrale fournit la solution, en coordonnées curvilignes isothermes au lieu de coordonnées rectilignes, toutes les fois qu'on sait trouver ces coordonnées, surfaces de flux et surfaces de niveau, pour la forme d'obstacle étudié, pourvu que les rayons de courbure de cet obstacle restent grands en comparaison de l'épaisseur atteinte par les inégalités de température. Plusieurs exemples, en particulier celui de l'ellipsoïde, sont traités complètement.

6. D'autres Chapitres importants sont ceux où M. Boussinesq étudie la résistance des fluides au mouvement des obstacles, sans rien emprunter aux vues d'Helmholtz et de ses successeurs quant à la formation des surfaces de discontinuité, et sans préciser les

distributions de turbulences près de l'obstacle. D'autres encore, se rapportent à la chute des gouttes visqueuses dans des liquides visqueux. A citer en particulier la précision donnée à une notion souvent invoquée par les physico-chimistes, celle d'une viscosité superficielle (t. III, 3e partie, chap. V) et tous les problèmes précis qui se rattachent à l'emploi de la méthode de Millikan pour la détermination de la charge de l'électron.

Enfin je rappelle que dans tous les Chapitres d'Optique on trouve d'ingénieuses méthodes d'approximation, et des constructions nouvelles.

Il est assez difficile de donner une idée plus précise de cette œuvre considérable, qui paraîtra peut-être aux nouveaux venus dans la Science un peu indifférente aux transformations les unes surtout verbales, les autres vraiment profondes, subies par les conceptions physiques de l'Univers depuis quinze ou vingt ans. Mais ceux qui savent quelle est la puissante individualité de M. Boussinesq, et comme chaque page de ses écrits est marquée à sa griffe, sauront transposer les dénominations s'il est nécessaire, et jouir du plaisir et du profit de la lecture et de l'étude approfondie de cet Ouvrage important et original.

Marcel Brillouin.

MÉLANGES.

SUR LE THÉORÈME DE MENABREA;

Par M. BERTRAND de FONTVIOLANT.

La première démonstration rigoureuse du théorème de Menabrea est due à M. Liénard [1] qui a bien voulu me la communiquer en juillet 1920; cette remarquable démonstration, fondée sur une propriété des formes quadratiques, est entièrement analytique.

Cette communication m'a conduit à établir, de ce même théorème, une autre démonstration également rigoureuse, mais d'ordre

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, de janvier 1921.

purement mécanique, dont j'ai donné connaissance à M. Liénard, en octobre 1920. Voici cette seconde démonstration :

Soient R_0 les forces de liaisons surabondantes d'un système hyperstatique quelconque, soumis à des forces extérieures F.

Au système isostatique obtenu par la suppression des liaisons surabondantes de ce système hyperstatique, appliquons les forces F et R_0 ; il prend un état d'équilibre élastique identique à celui du système hyperstatique donné soumis seulement aux forces F ; par suite, il a même potentiel interne H_0 que celui-ci.

Donnons maintenant aux forces R_0 des valeurs R différentes de R_0 ; le potentiel interne du système isostatique devient H ; il est fonction des forces R. Le théorème de Menabrea consiste en ce que *le minimum de* H *a lieu pour* $R = R_0$ *et est, par conséquent,* H_0. Pour le démontrer, il suffit d'établir que $H - H_0$ est positif, quelles que soient les valeurs attribuées aux forces R.

Dans le système isostatique soumis aux forces F et R, soient λ les déplacements des points d'application des forces F, évalués en projection sur les directions de ces forces ; γ les déplacements des points d'application des forces R, évalués en projection sur les directions de ces forces.

On a, d'après l'équation de Clapeyron,

$$H = \frac{1}{2}(\Sigma F\lambda + \Sigma R\gamma).$$

Cette expression de H est valable quelles que soient les valeurs des forces R. Si l'on fait ces forces égales à R_0, H devient H_0, les λ prennent des valeurs λ_0 et les γ s'annulent, puisque l'état d'équilibre élastique du système isostatique soumis aux forces F et R_0 est le même que celui du système hyperstatique donné soumis seulement aux forces F ; par conséquent,

$$H_0 = \frac{1}{2}\Sigma F\lambda_0.$$

Par suite,

$$H - H_0 = \frac{1}{2}(\Sigma F\lambda - \Sigma F\lambda_0 + \Sigma R\gamma).$$

Or, d'après le théorème de Betti, Boussinesq et Maurice Levy, si l'on fait agir, sur le système isostatique, d'abord les forces F et R, puis les forces F et R_0 après suppression des premières, on a

$$\Sigma F\lambda_0 = \Sigma F\lambda + \Sigma R_0\gamma.$$

On peut donc écrire

$$H - H_0 = \frac{1}{2}\Sigma(R - R_0)\gamma.$$

Mais, en vertu du principe de superposition, on a

$$\gamma = \gamma_F + \gamma_R,$$

en désignant par γ_F et γ_R les déplacements projetés des points d'application des forces R dus respectivement à l'influence exclusive des forces F et R.

Si, dans cette relation, on donne aux forces R les valeurs R_0, les γ_R prennent des valeurs γ_{R_0} et les γ s'annulent, de sorte que l'on a

$$0 = \gamma_F + \gamma_{R_0};$$

et, par suite,

$$\gamma = \gamma_R - \gamma_{R_0}.$$

Donc, finalement,

$$H - H_0 = \frac{1}{2}\Sigma(R - R_0)(\gamma_R - \gamma_{R_0}).$$

On voit immédiatement que le second membre de cette formule représente le potentiel interne du système isostatique supposé soumis à des forces $(R - R_0)$. Le potentiel interne étant, par essence, une quantité toujours positive, $H - H_0$ est positif, quelles que soient les valeurs des forces R. C. Q. F. D.

SUR LA VALEUR MOYENNE;

PAR M. SCIPIONE RINDI.

Soit $f(x)$ une fonction continue sur la circonférence de rayon ρ ayant l'origine pour centre. Posons

$$M_n = \frac{f(\rho) + f(\rho\alpha_n) + \ldots + f(\rho\alpha_n^{n-1})}{n}$$

et

$$M_{nq} = \frac{f(\rho) + f(\rho\alpha_{nq}) + \ldots + f(\rho\alpha_{nq}^{nq-1})}{nq},$$

étant

$$\alpha_h = e^{\frac{2\pi i}{h}}$$

et n, q des entiers. On a

$$\begin{aligned} M_{nq} - M_n = \quad & \frac{1}{n}\left\{\frac{f(\rho) + \ldots + f(\rho\alpha_{nq}^{q-1})}{q} - f(\rho)\right\} \\ & + \frac{1}{n}\left\{\frac{f(\rho\alpha_{nq}^{q}) + \ldots + f(\rho\alpha_{nq}^{2q-1})}{q} - f(\rho\alpha_n)\right\} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{n}\left\{\frac{f(\rho\alpha_{nq}^{n-1\,q}) + \ldots + f(\rho_{nq}^{nq-1})}{q} - f(\rho\alpha_n^{n-1})\right\}. \end{aligned}$$

Supposons n suffisamment grand pour que dans tout arc $= \frac{2\pi}{n}$ l'oscillation soit $< \sigma$; comme les points

$$\rho\alpha_{nq}^{s-1\,q},\quad \rho\alpha_{nq}^{s-1\,q+1},\quad \ldots\ldots\quad \rho\alpha_{nq}^{sq-1}$$

sont compris entre les deux

$$\rho\alpha_n^{s-1},\quad \rho\alpha_n^{s}$$

à l'exception des deux premiers qui coïncident, on aura

$$D_s = \left|\frac{f(\rho\alpha_{nq}^{(s-1)q}) + \ldots + f(\rho\alpha_{nq}^{sq-1})}{q} - f(\rho\alpha_n^{s-1})\right| < \sigma$$

et par conséquent

$$|M_{nq} - M_n| < \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} D_s < \rho$$

quel que soit q.

Considérons maintenant l'expression M_{n+p}, p étant un entier quelconque, et n suffisamment grand pour qu'on ait, quel que soit q,

$$|M_{nq} - M_n| < \frac{\sigma}{2}.$$

Alors il sera

$$|M_{n(n+p)} - M_n| < \frac{\sigma}{2}$$

et aussi

$$|M_{(n+p)n} - M_{n+p}| < \frac{\sigma}{2}:$$

d'où

$$|M_{n+p} - M_n| < \sigma,$$

ce qui prouve l'existence de $\lim\limits_{n=\infty} M_n$.

SUR LA DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

Je me propose, dans ce premier paragraphe, de présenter d'une manière simple les formules de la dynamique de la relativité, en prenant comme point de départ une idée que je crois nouvelle, celle de l'accélération totale relativiste.

1. *L'argument hyperbolique d'une vitesse.* — On sait que Minkowski a donné une forme remarquable aux formules de Lorentz en introduisant un angle ψ défini par la formule

$$\operatorname{tang}\psi = -i\frac{U}{W},$$

U étant la vitesse de la translation du second système d'axes par rapport au premier, W étant la vitesse de la lumière dans le vide. L'angle ψ est purement imaginaire et l'on peut poser $\psi = -i\varphi$; on a alors

$$\operatorname{tang} - i\varphi = -i\frac{U}{W}, \qquad \text{ou} \qquad -i\operatorname{th}\varphi = -i\frac{U}{W},$$

ou enfin

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{U}{W}.$$

L'argument hyperbolique φ a été employé par M. Bricard dans un article inséré au Volume des *Nouvelles Annales de Mathématiques* pour 1917.

2. M. Bricard, étudiant le mouvement d'un point matériel pour une trajectoire rectiligne dont la direction est celle de la translation du second système d'axes, pose encore (avec des indices)

$$(1) \qquad \operatorname{th}\theta = \frac{V}{W} \qquad \text{ou} \qquad V = W\operatorname{th}\theta,$$

V étant la vitesse du point à la date t. En étendant cette notation

au cas d'un mouvement curviligne, j'ai été conduit à l'idée que j'expose ici.

3. *Définition de l'accélération totale relativiste.* — La Mécanique ordinaire définit l'accélération totale comme étant la dérivée géométrique par rapport à t d'un vecteur MT porté par la tangente en M à la trajectoire, dirigé dans le sens du mouvement, et égal à la vitesse V, ou encore à W. th θ. *J'appellerai accélération totale relativiste la dérivée géométrique par rapport à t d'un vecteur* MS *qui diffère du précédent en ce que sa longueur, au lieu d'être* W. th θ, *est* W. sh θ; j'écrirai

$$(2) \qquad (\gamma) = \frac{d}{dt}(\text{vecteur } W \operatorname{sh}\theta),$$

le vecteur W sh θ étant porté par la tangente.

Si la vitesse V est faible par rapport à la vitesse de la lumière, l'accélération relativiste diffère peu de l'accélération ordinaire.

4. La composante tangentielle et la composante normale de l'accélération relativiste (celle-ci dans le plan osculateur, suivant la normale principale) sont

$$(3) \qquad \gamma' = \frac{d}{dt}(W \operatorname{sh}\theta),$$

$$(4) \qquad \gamma'' = \frac{V.W \operatorname{sh}\theta}{\rho}.$$

La première formule est immédiate. La seconde résulte de ce que, si ε désigne la mesure en radians de l'angle de contingence de la trajectoire, γ'' est la limite du rapport

$$\frac{W \operatorname{sh}\theta \times \varepsilon}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{V.W \operatorname{sh}\theta \times \varepsilon}{ds}.$$

5. L'égalité

$$(5) \qquad W \operatorname{sh}\theta = V \operatorname{ch}\theta$$

permet d'écrire

$$(2') \qquad (\gamma) = \frac{d}{dt}(\text{vecteur } V \operatorname{ch}\theta),$$

$$(3') \qquad \gamma' = \frac{d}{dt}(V \operatorname{ch}\theta),$$

$$(4') \qquad \gamma'' = \frac{V^2}{\rho} \operatorname{ch}\theta.$$

6. *Composantes de l'accélération relativiste suivant les axes.* — Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point M, à la date t; nous poserons

$$(6)\qquad u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}.$$

Il résulte de la formule (2') que les composantes de l'accélération relativiste suivant les axes sont

$$(7)\qquad \gamma_x = \frac{d}{dt}(u \operatorname{ch}\theta), \qquad \gamma_y = \frac{d}{dt}(v \operatorname{ch}\theta), \qquad \ldots.$$

7. *La force.* — La masse du point matériel étant désignée par μ, on a pour la force

$$(8)\qquad (F) = \mu(\gamma) = \mu \frac{d}{dt}(\text{vecteur } W \operatorname{sh}\theta),$$

$$(9)\qquad F' = \mu\,\gamma' = \mu \frac{d}{dt}(W \operatorname{sh}\theta),$$

$$(10)\qquad F'' = \mu\,\gamma'' = \mu \frac{V.W \operatorname{sh}\theta}{\rho};$$

on peut écrire

$$(8')\qquad (F) = \mu \frac{d}{dt}(\text{vecteur } V \operatorname{ch}\theta),$$

$$(9')\qquad F' = \mu \frac{d}{dt}(V \operatorname{ch}\theta),$$

$$(10')\qquad F'' = \mu \frac{V^2}{\rho} \operatorname{ch}\theta.$$

8. *Impulsion et travail.* — On peut écrire, pour la composante tangentielle de la force,

$$F' = \mu W \operatorname{ch}\theta \frac{d\theta}{dt} = \mu W^2 \operatorname{sh}\theta \frac{d\theta}{ds},$$

et l'on a

$$F' = \mu \frac{d}{dt}(W \operatorname{sh}\theta) = \mu \frac{d}{ds}(W^2 \operatorname{ch}\theta);$$

on obtient ainsi, pour l'impulsion et le travail,

$$(11)\qquad \int F'\,dt = \mu W(\operatorname{sh}\theta - \operatorname{sh}\theta_0),$$

$$(12)\qquad \begin{aligned} \int F'\,ds &= \mu W^2(\operatorname{ch}\theta - \operatorname{ch}\theta_0) \\ &= \mu W^2[(\operatorname{ch}\theta - 1) - (\operatorname{ch}\theta_0 - 1 \\ &= 2\mu W^2\left(\operatorname{sh}^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{\theta_0}{2}\right); \end{aligned}$$

les quantités $\mu W \operatorname{sh}\theta$ et $2\mu W^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}$ sont comparables à la quantité de mouvement et à l'énergie cinétique de la Mécanique ordinaire.

9. *Les équations de la dynamique de la relativité.* — Les formules (7) donnent, pour les composantes de la force suivant les axes,

$$X = \frac{d}{dt}(\mu \operatorname{ch}\theta u), \qquad Y = \frac{d}{dt}(\mu \operatorname{ch}\theta v), \qquad Z = \ldots. \tag{13}$$

10. *La masse dynamique m, fonction de la vitesse.* — Les formules (9′) et (10′) donnent l'idée de poser

$$m = \mu \operatorname{ch}\theta; \tag{14}$$

ces formules prennent ainsi la forme

$$F' = \frac{d}{dt}(mV), \tag{15}$$

$$F'' = m\frac{V^2}{\rho}. \tag{16}$$

La quantité m peut être appelée *masse dynamique;* comme $\theta = 0$ donne $m = \mu$, on dira que μ est la *masse statique.* La masse dynamique croît avec la vitesse; pour des vitesses faibles (par rapport à W) elle diffère peu de la masse statique; si V tend vers W, θ croît au delà de toute limite, m augmente indéfiniment.

Les équations (13) peuvent s'écrire

$$X = \frac{d}{dt}(mu), \qquad Y = \frac{d}{dt}(mv), \qquad Z = \ldots. \tag{17}$$

11. En écrivant

$$(mV)^2 = (mu)^2 + (mv)^2 + (mw)^2,$$

on a, par dérivation et en divisant par m,

$$V\frac{d}{dt}(mV) = u\frac{d}{dt}(mu) + \ldots + \ldots$$

ou

$$F'\,ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

cette relation pouvait être écrite *a priori*, $F'ds$ étant le produit scalaire de F et de ds.

(*A suivre.*)

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

E. GOURSAT. — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2e édition, revue et augmentée, 1 vol. in-8°, 459 p. Paris, J. Hermann, 1921.

M. Goursat publie une nouvelle édition de ses *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre* qui, suivant à peu de choses près le plan de la première, en diffère cependant autant que pouvaient le faire prévoir les contributions puissantes et variées que, depuis trente ans, l'auteur n'a cessé d'apporter aux théories qu'il traite dans ce Volume.

La première édition a été analysée dans ce *Bulletin* (1) par C. Bourlet, qui l'avait lui-même rédigée d'après les leçons du maître; il suffira donc d'indiquer les modifications et additions par lesquelles la nouvelle s'en distingue. Ce sont les premiers Chapitres qui ont été le plus profondément remaniés; le premier l'a été complètement. Il est consacré à la démonstration des théorèmes d'existence des intégrales, qui permettent d'exposer une théorie rigoureuse et élégante des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue, et, en premier lieu, de celui qui est relatif aux systèmes *normaux* (systèmes de Kowalewski). La méthode de démonstration, personnelle à l'auteur qui l'a indiquée il y a une quinzaine d'années, est beaucoup plus simple que celles que l'on possédait à cette époque : on établit d'abord le théorème pour un système normal du premier ordre, très simplement, grâce aux procédés du Calcul des Limites et à un ingénieux artifice; puis, considérant un système normal d'ordre quelconque, on lui substitue un système normal du premier ordre au moyen de l'introduction d'inconnues auxiliaires. Le théorème ne fournit une solution du problème qu'au voisinage des valeurs initiales des variables indépendantes; l'auteur montre que l'on peut assigner aux inté-

(1) T. XV, 2e série, 1891, p. 5.

grales un domaine d'existence beaucoup étendu, en général, que le domaine de convergence des séries entières qui les représentent; c'est un problème de prolongement analytique; il se traite assez simplement grâce à l'origine des fonctions que l'on considère : les coefficients des développements qui les déterminent s'obtiennent uniquement par additions, multiplications et différentiations. La notion de multiplicité intégrale permet de donner au théorème général d'existence la forme géométrique suivante : *par toute multiplicité* M_{n-1} *de l'espace à* $n+p$ *dimensions, il passe en général une multiplicité intégrale* M_n *et une seule d'un système normal du premier ordre;* déterminer M_n c'est résoudre le *problème de Cauchy*.

L'auteur étend les résultats précédents à des systèmes du premier ordre qui ne sont pas sous forme normale, puis il passe à l'étude des systèmes du premier ordre à une seule inconnue. Il indique ce qu'il faut entendre par systèmes *complètement intégrables* ou *passifs;* il établit le théorème d'existence, dont les applications seront nombreuses, pour un système de r équations, en montrant que l'intégration du système se ramène à la résolution du problème de Cauchy pour r équations du premier ordre, successivement; il montre ensuite, au moyen de la transformation de Mayer, qu'il suffit de résoudre le problème de Cauchy pour une seule équation. Les deux derniers paragraphes du Chapitre sont consacrés aux systèmes de König et aux intégrales singulières.

Les systèmes linéaires et les systèmes complets forment la substance du deuxième Chapitre. La notion féconde *d'intégrales principales* a été introduite; elle permet, grâce aux théorèmes d'existence des systèmes à une inconnue, d'exposer très simplement la méthode de Mayer; la méthode de Jacobi bénéficie de nouveaux développements, tandis que, plus loin, ont été ajoutés un paragraphe sur l'intégration des systèmes linéaires avec seconds membres, et deux exercices importants sur la généralisation de la théorie des intégrales premières et les systèmes de Jacobi.

Dans le Chapitre III, on trouve une démonstration directe du théorème d'existence des systèmes d'équations aux différentielles totales complètement intégrables et de nouvelles considérations sur les caractéristiques des systèmes complets, le facteur intégrant

et les systèmes d'équations aux différentielles totales non complètement intégrables. L'étude géométrique des équations à trois variables, par une modification heureuse du plan général, est présentée immédiatement après l'exposé des méthodes de Lagrange et Charpit (Chap. IV) et de Cauchy (Chap. V) : la notion de caractéristique d'ordre supérieur y est introduite et l'étude du complexe des caractéristiques y est bien développée.

Les deux méthodes de Jacobi, avec les perfectionnements de Mayer et de Lie, sont exposées dans les Chapitres VII et VIII avec une nouvelle démonstration du théorème de Lie, rattaché au théorème général d'existence, et une application aux systèmes linéaires.

Quelques développements sur les équations semi-linéaires ont été ajoutés au Chapitre IX, où se trouve traitée la théorie générale de Lie.

Enfin, il ne faut pas manquer de signaler (Chap. X) une démonstration, qui appartient à l'auteur, des relations existant entre les fonctions Z_i, X_k, P_h des transformations de contact et qui s'appuie sur un lemme de caractère purement *algébrique*.

On voudrait avoir réussi à montrer combien les modifications que présente la nouvelle édition sont considérables et essentielles; mais il n'a pas été possible d'énumérer toutes les améliorations de détail, et elles sont nombreuses, qui témoignent chez l'auteur d'un souci constant de clarté, de simplicité et d'actualité.

Dans la Préface, M. Goursat annonce une suite à cet Ouvrage, sous la forme de *Leçons sur le problème de Pfaff;* tous ceux qui liront le présent Volume souhaiteront lire le suivant au plus tôt.

G. Cerf.

ROY (Louis). — Statique graphique et Résistance des matériaux (Tome II du *Cours de Mécanique appliquée* de l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée de l'Université de Toulouse). Gr. in-8, 213 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Dans ce Volume, l'Auteur nous donne le Cours qu'il professe depuis plusieurs années à l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée de l'Université de Toulouse. Il faut féliciter

M. Roy d'avoir su condenser, en si peu de pages et d'une façon si précise, tout l'essentiel de la Statique graphique et de la Résistance des Matériaux.

La *Statique graphique* proprement dite consiste en un ensemble de constructions résolvant des problèmes d'équilibre graphiquement, c'est-à-dire au moyen d'épures. Elle s'appuie donc uniquement sur des considérations de Géométrie et de Statique, sans avoir besoin d'aucune hypothèse accessoire relative à la nature des corps solides supportant les forces, ceux-ci étant toujours supposés rigoureusement rigides. La statique graphique des systèmes *plans*, qui est de beaucoup la plus importante en pratique, repose presque entièrement sur la *Construction de Varignon*, relative à la réduction d'un système de forces au moyen d'un polygone *dynamique* et d'un polygone *funiculaire*. Au début de l'Ouvrage, les propriétés de ces polygones sont étudiées en détail. Ils permettent la représentation graphique des moments, et, pour un système supportant des forces données, la détermination des « réactions d'appuis », lorsque celles-ci sont complètement définies par la Statique seule, cas dans lequel le système est dit *isostatique*. Comme exemples simples et importants de systèmes isostatiques, citons le cas d'un solide (plan) ayant une articulation et un appui fixe (sans frottement), ou ayant trois articulations (arc à trois rotules); un solide encastré peut être aussi considéré comme isostatique, en ce sens que l'on peut déterminer les « éléments de réduction » des réactions d'encastrement.

La généralisation toute naturelle des polygones funiculaires attachés à un système de forces discontinues, consiste dans les courbes funiculaires attachées à un système de forces continues. Le cas le plus important est celui de forces parallèles verticales (pesanteur). En établissant, dans ce cas, l'équation différentielle de la courbe funiculaire, l'Auteur en profite pour montrer, en passant, comment on peut, inversement, intégrer graphiquement une équation différentielle de même forme par la construction d'un funiculaire.

Un des problèmes les plus importants de la Statique est la détermination des tensions et compressions dans un système réticulaire articulé (plan). Dans un système « complet », strictement indéformable, cette détermination peut être effectuée par la Statique seule,

le système tout entier étant isostatique. L'Auteur indique les deux méthodes classiques à ce sujet : *méthode des sections* et *méthode des nœuds*. Il donne plusieurs exemples simples et intéressants d'application de ces méthodes. Parmi ces exemples, je citerai la ferme imaginée par M. Roy lui-même, qu'il appelle *ferme en éventails*. La particularité très remarquable et très avantageuse de cet ingénieux système est que la triangulation est uniquement constituée par des *tirants*. Or un tirant ayant, dans la pratique, une section toujours inférieure à celle d'un poinçon de même longueur résistant au même effort, il est fort avantageux, au point de vue de l'économie des matériaux, d'avoir une ferme uniquement triangulée par des tirants, et donnant lieu à des efforts de compression sensiblement constants tout le long des segments d'arbalétriers. C'est à ce double *desideratum* que répond la ferme en éventails. Il se trouve même que les tensions de la plupart des tirants sont généralement très faibles : ces tirants pourront donc être réalisés au moyen de fils ou câbles très fins; d'où diminution très sensible du poids total de la ferme. Bien entendu, il y aura lieu, dans ce cas, de prendre une précaution : c'est de s'assurer que, par suite des efforts accidentels et imprévus qui peuvent se produire, aucune de ces tensions ne pourra se changer en compression. Cette précaution est d'ailleurs de rigueur toutes les fois qu'une pièce tendue est matérialisée par un fil, et non par une barre : il faut avoir la certitude que ce fil ne pourra, même accidentellement, être soumis à une compression, si faible soit-elle.

La théorie des systèmes articulés ne s'applique, en toute rigueur, que si les nœuds sont véritablement articulés (par exemple, au moyen de boulons). Or, dans la pratique, ils sont ordinairement rivés. M. Roy discute, avec sa clarté habituelle, la validité de la théorie dans ce cas, et les efforts secondaires qui résultent de la rigidité des joints rivés.

Comme dernière application importante des principes généraux de la Statique graphique, l'Auteur indique les procédés d'évaluation des aires planes (formules de Simson, de Poncelet, planimétrie), et de détermination des centres de gravité et des moments d'inertie de ces aires.

La seconde Partie de l'Ouvrage traite de la *Résistance des*

Matériaux. Les corps solides naturels ne sont jamais rigoureusement rigides : ils subissent des déformations croissant avec l'intensité des forces qui leur sont appliquées, jusqu'à la rupture. Il importe de savoir déterminer les forces extérieures maxima qu'on peut, en toute sécurité, appliquer à un solide, ou inversement de savoir déterminer les dimensions minima qu'il suffira de donner à un solide destiné à résister en toute sécurité à des forces données. La solution de ce double problème est le but de la *Résistance des Matériaux*.

Comme c'est à l'expérience qu'il faut demander les propriétés élastiques des corps, on observera que la Résistance des Matériaux n'a pas, comme la Statique graphique, d'uniques bases géométriques et statiques, mais repose aussi sur l'expérience, à laquelle on adjoint, suivant les cas, certaines hypothèses plus ou moins justifiées par la théorie mathématique de l'Élasticité.

En Résistance des Matériaux, on étudie d'une façon toute spéciale, à cause de leur grande importance pratique, les pièces « prismatiques », c'est-à-dire celles à fibre moyenne. La réduction des forces extérieures par rapport au centre de gravité d'une section droite quelconque d'une telle pièce permet d'y définir l'effort longitudinal N, l'effort tranchant T, le moment de flexion M, le moment de torsion M_t. Les trois composantes de la pression sur les divers éléments plans de la section droite doivent, pour assurer l'équilibre, vérifier les six équations générales de la Statique. Ces six équations ne suffisent naturellement pas pour déterminer la pression sur chaque élément. Pour achever cette détermination, on fait, dans chaque cas, des hypothèses suggérées par la nature des déformations observées. Ces hypothèses, l'Auteur ne manque pas de les spécifier chaque fois d'une façon nette et explicite, de les discuter, et d'indiquer dans quelle mesure elles sont confirmées par l'expérience ou inspirées par la théorie.

M. Roy étudie d'abord le cas des *déformations simples*, où une seule des quatre quantités N, T, M, M_t diffère de zéro. Après avoir fait l'étude spéciale de ces cas particuliers, avec exemples à l'appui, il traite le cas des *déformations composées* où aucune des quantités N, T, M, M_t n'est nulle, en utilisant le « principe de superposition des petites déformations et des pressions ». Cette méthode qui consiste à procéder du simple au composé, si elle n'est pas la plus

rapide, est à coup sûr la plus naturelle et la plus facile à suivre pour l'étudiant abordant ces questions pour la première fois.

La fibre moyenne déformée d'une pièce prismatique porte le nom de *ligne élastique*. Pour une poutre initialement droite et subissant la flexion plane simple, son équation différentielle est facile à former : elle se trouve être de même forme que celle d'une courbe funiculaire d'un certain système de forces continues variables : d'où une construction simple, souvent utilisée, pour la détermination graphique de la ligne élastique. M. Roy indique tout d'abord quelques exemples particuliers simples de systèmes isostatiques : poutre encastrée à une extrémité et portant une charge à l'autre (ressort à lames) ; poutre à deux appuis simples avec charges verticales isolées ou réparties uniformément. Puis il montre, pour certains systèmes hyperstatiques (poutre encastrée à ses deux extrémités, ou encastrée à une extrémité et ayant un appui fixe à l'autre), comment les conditions supplementaires imposées par ces liaisons hyperstatiques permettent de déterminer complètement la ligne élastique et les moments d'encastrement.

Un exemple particulièrement important de système à liaisons hyperstatiques est fourni par une *Poutre à travées solidaires*. Lorsque, pour une telle poutre, on connaît, en deux sections, le moment fléchissant, on peut en déduire facilement le moment fléchissant en une section intermédiaire. D'où l'on tire aisément une relation entre trois moments sur appuis consécutifs (théorème des trois moments). Il est alors facile de voir que le problème de la poutre continue à n travées est complètement déterminé.

D'autres types de systèmes hyperstatiques, dont la Résistance des Matériaux permet de faire l'étude complète, sont présentés par les *arcs* à deux ou une articulation, ou sans articulation (arc encastré) ; tandis que l'arc à trois articulations constitue, lui, un système isostatique dont les réactions d'appuis sont déterminées par la Statique seule.

Les colonnes chargées de bout sont des pièces travaillant à la compression simple. Mais, en pratique, il faut être assuré qu'une telle pièce ne pourra pas « flamber ». L'Auteur indique les conditions de non-flambement à remplir dans les divers cas.

Il étudie ensuite les Charpentes métalliques, au point de vue de la résistance. L'étude des Charpentes « complètes » se trouve avoir

été faite en Statique graphique, au sujet des systèmes articulés : c'est une question de Statique pure. Pour les Charpentes « surabondantes », des considérations d'élasticité permettent d'ajouter aux équations de la Statique le nombre exact d'équations qui achève de déterminer le problème.

L'Ouvrage se termine par un Chapitre consacré aux enveloppes rondes, minces ou épaisses, dont les chaudières et les bouches à feu offrent l'exemple le plus usuel, et aux volants, très souvent assimilables à des anneaux minces tournants, pour lesquels la vitesse périphérique ne doit pas dépasser une limite bien déterminée par la nature du métal.

On voit que dans ce Volume, d'allure pourtant assez élémentaire, aucune matière essentielle touchant au sujet n'est omise. Il convient, en terminant, de signaler la haute clarté d'exposition avec laquelle toutes les questions sont traitées. M. Roy a apporté, dans ce Livre, le même style soigné, net et précis que l'on apprécie tant dans ses Mémoires.

H. Vergne.

MÉLANGES.

SUR LA DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ

(suite et fin);

Par M. G. Fontené.

12. *Masse longitudinale et masse transversale.* — En définissant l'accélération totale comme la dérivée par rapport à t du vecteur $W \operatorname{sh}\theta$ porté par la tangente, nous avons obtenu les formules

$$F' = \mu W \operatorname{ch}\theta \frac{d\theta}{dt}, \qquad F'' = \mu \frac{V^2}{\rho} \operatorname{ch}\theta.$$

Nous pouvons écrire, en introduisant l'accélération tangentielle ordinaire $\frac{dV}{dt}$ ou $\frac{W}{\operatorname{ch}^2\theta}\frac{d\theta}{dt}$,

$$F' = \mu \operatorname{ch}^3\theta \frac{dV}{dt}, \qquad F'' = \mu \operatorname{ch}\theta \frac{V^2}{\rho}$$

ou encore

$$(18)\qquad F' = m'\frac{dV}{dt}, \qquad F'' = m''\frac{V^2}{\rho},$$

en posant

$$(19)\qquad m' = \mu\,\mathrm{ch}^3\theta, \qquad m'' = \mu\,\mathrm{ch}\,\theta.$$

Les quantités m' et m'' sont celles que les physiciens appellent *masse longitudinale* et *masse transversale;* la masse transversale m'' se confond d'ailleurs avec la masse dynamique m des formules (15), (16), (17). Insistons sur ce point.

13. *La force* F *définie ici est bien celle que l'on considère en Mécanique relativiste.* — Reprenons les faits précédents sans employer l'argument θ; nous utiliserons pour cela les formules

$$(20)\qquad \mathrm{ch}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}}, \qquad \mathrm{sh}\,\theta = \frac{\frac{V}{W}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}}.$$

Les formules (2), (3) et (4), ou (2′), (3′) et (4′) deviennent

$$(21)\qquad (\gamma)\quad \text{ou}\quad \frac{(F)}{\mu} = \frac{d}{dt}\left(\text{vecteur}\,\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}}\right),$$

$$(22)\qquad \gamma'\quad \text{ou}\quad \frac{F'}{\mu} = \frac{d}{dt}\,\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}},$$

$$(23)\qquad \gamma''\quad \text{ou}\quad \frac{F''}{\mu} = \frac{V^2}{\rho}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}};$$

les formules (7) deviennent

$$(24)\qquad \gamma.c\quad \text{ou}\quad \frac{X}{\mu} = \frac{d}{dt}\,\frac{u}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}}, \qquad \ldots$$

On a encore (n° 10)

$$F' = \frac{d}{dt}(mV), \qquad F'' = m\frac{V^2}{\rho},$$

$$X = \frac{d}{dt}(mu), \qquad Y = \frac{d}{dt}(mv), \qquad \ldots,$$

en posant

$$(25)\qquad m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}}.$$

On a enfin (n° 12)

$$F' = m' \frac{dV}{dt}, \qquad F'' = m'' \frac{V^2}{\rho},$$

en posant

$$(26)\qquad m' = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{V^2}{W^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad m'' = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}};$$

on voit ainsi que m' et m'' sont, comme on l'a annoncé, la masse longitudinale et la masse transversale des physiciens, que par suite F' et F'' sont la force longitudinale et la force transversale que l'on considère ordinairement en Mécanique relativiste.

Cela résulte d'ailleurs plus simplement des formules (24) puisque, pour déterminer les coefficients m_L et m_T des formules

$$F_L = m_L \frac{dV}{dt} \qquad \text{et} \qquad F_T = m_T \frac{V^2}{\rho}$$

écrites *a priori*, les physiciens considèrent la résultante F des deux forces F_L et F_T et, en écrivant que les composantes X, Y, Z de cette force donnent lieu à des formules de la forme (17), afin de généraliser un théorème de Mécanique ordinaire, trouvent pour m la valeur donnée par la formule (25).

14. Je rappelle ici le calcul dont on vient de parler et qui est dû, je crois, à Poincaré. Si α, β, γ et λ, μ, ν sont les cosinus des angles que la tangente à la trajectoire et la normale principale font avec les axes, on a

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{\lambda}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\left(\frac{u}{V}\right)}{ds} = \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{V}\right) = \frac{Vu' - uV'}{V^3}, \qquad \ldots,$$

les accents indiquant des dérivées par rapport à t; on a ainsi

$$(27)\qquad \begin{aligned} X = X_L + X_T &= m_L V' \frac{u}{V} + m_T \frac{Vu' - uV'}{V} \\ &= m_T u' + (m_L - m_T)\frac{uV'}{V}, \qquad \ldots. \end{aligned}$$

Comme on veut avoir

$$X = \frac{d}{dt}(mu) = mu' + um' = mu' + u\frac{dm}{dV}V',$$

on obtient les deux relations

$$m = m_T, \qquad \frac{dm}{dV} = \frac{m_L - m_T}{V};$$

nous poserons

$$\frac{V}{W} = k,$$

et nous écrirons

$$m_T = m, \qquad \frac{dm}{dk} = \frac{m_L - m_T}{k}.$$

Il manque une équation, et rien n'empêcherait de prendre, par exemple,

$$m_L - m_T = m = \text{const.},$$

solution évidente *a priori* et sans intérêt.

On admet, pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons au paragraphe II, la relation

$$\frac{m_L}{m_T} = \frac{1}{1 - k^2},$$

qui détermine seule le problème; on a ainsi

$$\frac{m_L}{1} = \frac{m_T}{1 - k^2} = \frac{m_L - m_T}{k^2}.$$

On obtient donc

$$m_T = m, \qquad m_L = \frac{m}{1 - k^2}, \qquad \frac{dm}{dk} = \frac{mk}{1 - k^2};$$

en écrivant

$$\frac{dm}{m} = \frac{k\,dk}{1 - k^2},$$

on a finalement, avec $m = \mu$ pour $V = 0$,

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}}, \qquad m_T = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}}, \qquad m_L = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{V^2}{W^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ce sont les formules que l'on avait en vue.

[Si, après avoir obtenu la formule

$$F_L = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{V^2}{W^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dV}{dt},$$

on abandonne l'idée de masse longitudinale et de masse transversale qui l'a amenée, et si l'on continue le calcul, on arrive à la formule

$$F' = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}}\right),$$

c'est-à-dire à la formule (22), équivalente à la formule (3)].

15. Observons que les formules (27) peuvent maintenant s'écrire

$$(28) \qquad X = mu' + \frac{k^2 m}{1 - k^2} \frac{uV'}{V}, \qquad \ldots;$$

on en déduit

$$\Sigma X u = m VV' + \frac{k^2 m}{1 - k^2} VV' = \frac{m VV'}{1 - k^2}$$

ou

$$(29) \qquad \Sigma X\, dx = \frac{\mu V\, dV}{\left(1 - \frac{V^2}{W^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \mu W^2 d \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}}.$$

Cette formule équivaut à la formule (12).

16. *Mouvement produit par une force constante.* — Si la force est constante, avec $X = \mu A$, $Y = \mu B$, $Z = \mu C$, les formules (24) donnent

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}} = At + A', \qquad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}} = Bt + B', \qquad \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{W^2}}} = Ct + C'.$$

On a donc

$$\frac{u^2}{(At + A')^2} = \frac{v^2}{(Bt + B')^2} = \frac{w^2}{(Ct + C')^2} = \frac{W^2 - V^2}{W^2} = \frac{W^2}{D^2 t^2 + 2 D' t + D''}$$

ou

$$\frac{dx}{At+A} = \frac{dy}{Bt+B} = \frac{dz}{Ct+C} = \frac{W\,dt}{\sqrt{D^2t^2+2D't+D''}}$$

et l'on obtiendra x, y, z en fonction de t.

Si l'on suppose, par exemple,

$$X = \mu A, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad u = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

avec A non nul, on a

$$\frac{dx}{At} = \frac{dy}{B'} = \frac{dz}{C'} = \frac{W\,dt}{\sqrt{A^2t^2+B'^2+C'^2+W^2}};$$

si t croît indéfiniment, la valeur absolue de u tend vers W, tandis que v et w tendent vers zéro.

II.

L'emploi de la vitesse de la lumière pour définir l'argument hyperbolique θ d'une vitesse par la formule

$$\operatorname{th}\theta = \frac{V}{W}$$

et l'emploi de la relation

$$\frac{m_L}{m_T} = \frac{1}{1-\dfrac{V^2}{W^2}} = \operatorname{ch}^2\theta$$

pour légitimer après coup la définition de l'accélération totale par la formule

$$(\gamma) = \frac{d}{dt}(\text{vecteur } W \operatorname{sh}\theta),$$

tels sont les seuls emprunts à la doctrine relativiste que l'on ait faits dans ce qui précède. Le système (Σ) dans lequel on a considéré le mouvement d'un point matériel était un *système immobile;* les formules de Lorentz n'ont pas eu à intervenir.

Nous allons maintenant considérer la dynamique du point matériel dans un système (Σ_2) animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un système fixe (Σ_1).

17. *Les formules de Lorentz.* — La vitesse de la translation

étant U, si l'on pose

$$\frac{U}{W} = \operatorname{th}\varphi,$$

les formules de Lorentz prennent la forme

$$(30)\quad \begin{cases} x_1 = x_2 \operatorname{ch}\varphi + W t_2 \operatorname{sh}\varphi, \qquad y_1 = y_2, \qquad z_1 = z_2, \\ W t_1 = x_2 \operatorname{sh}\varphi + W t_2 \operatorname{ch}\varphi, \end{cases}$$

et l'on à les formules inverses

$$(31)\quad \begin{cases} x_2 = x_1 \operatorname{ch}\varphi - W t_1 \operatorname{sh}\varphi, \qquad y_2 = y_1, \qquad z_2 = z_1, \\ W t_2 = -x_1 \operatorname{sh}\varphi + W t_1 \operatorname{ch}\varphi; \end{cases}$$

ces dernières formules se déduisent des précédentes en échangeant les indices 1 et 2 et en remplaçant φ par $-\varphi$.

Si l'on se donne x_2 et t_1, c'est-à-dire si l'on considère le système mobile à la date absolue t_1 et un point de ce système, on peut calculer x_1 et t_2, c'est-à-dire l'abscisse absolue de ce point et la date au chronomètre placé en ce point; cela correspond d'ailleurs à la façon dont on établit les formules.

La première des formules inverses, mise sous la forme

$$x_1 = W t_1 \operatorname{th}\varphi + \frac{x_2}{\operatorname{ch}\varphi},$$

traduit le *mouvement* du système mobile et la *contraction* des règles divisées dans la direction de la translation : x_2 est une abscisse relativiste, $\frac{x_2}{\operatorname{ch}\varphi}$ est une abscisse absolue à la date zéro.

La seconde des formules directes, mise sous la forme

$$t_2 = -\frac{x_2}{W} \operatorname{th}\varphi + \frac{t_1}{\operatorname{ch}\varphi},$$

traduit le *décalage* des chronomètres aux divers points du système mobile (*date locale*) et *l'allongement* de la seconde battue par ces chronomètres (ralentissement des chronomètres mobiles). Pour le chronomètre du point O_2, origine des axes mobiles, il faut faire $x_2 = 0$ et l'on a $t_2 = \frac{t_1}{\operatorname{ch}\varphi}$; pour un chronomètre placé en un point d'abscisse x_2, il faut retrancher $\frac{W}{x_2} \operatorname{th}\varphi$.

18. *Cas d'un mouvement rectiligne dans la direction de la translation. Vitesses.* — Considérons un point matériel en mouvement sur la droite qui porte les axes O_1x_1 et O_2x_2; nous poserons

$$(32)\qquad \frac{dx_1}{dt_1} = W \operatorname{th}\theta_1, \qquad \frac{dx_2}{dt_2} = W \operatorname{th}\theta_2.$$

Les formules inverses donnent d'une part

$$\begin{aligned} dx_2 &= dx_1 \operatorname{ch}\varphi - W\,dt_1 \operatorname{sh}\varphi \\ &= W\,dt_1(\operatorname{th}\theta_1 \operatorname{ch}\varphi - \operatorname{sh}\varphi) \\ &= \frac{W\,dt_1}{\operatorname{ch}\theta_1}\operatorname{sh}(\theta_1 - \varphi), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} W\,dt_2 &= W\,dt_1 \operatorname{ch}\varphi - dx_1 \operatorname{sh}\varphi \\ &= W\,dt_1(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{th}\theta_1 \operatorname{sh}\varphi) \\ &= \frac{W\,dt_1}{\operatorname{ch}\theta_1}\operatorname{ch}(\theta_1 - \varphi); \end{aligned}$$

la division donne

$$\operatorname{th}\theta_2 = \operatorname{th}(\theta_1 - \varphi),$$

et l'on a ainsi entre les arguments θ_1 et θ_2 la relation simple

$$(33)\qquad \theta_2 = \theta_1 - \varphi;$$

on doit observer avec soin que φ est une constante.

On serait arrivé plus rapidement à ce résultat en écrivant au début

$$\operatorname{th}\theta_2 = \frac{dx_2}{W\,dt_2} = \ldots = \frac{\operatorname{th}\theta_1 - \operatorname{th}\varphi}{1 - \operatorname{th}\theta_1 \operatorname{th}\varphi} = \operatorname{th}(\theta_1 - \varphi);$$

mais le calcul qui a été fait nous sera utile. La formule (33) se trouve dans la Note de M. Bricard citée au début.

On écrit d'ordinaire

$$\frac{u_2}{W} = \frac{\dfrac{u_1}{W} - \dfrac{U}{W}}{1 - \dfrac{u_1}{W}\dfrac{U}{W}};$$

pour $u_1 = W$, on a aussi $u_2 = W$: c'est le cas de la lumière. D'ailleurs $u_1 = W$ donne θ_1 infini, et alors θ_2 est également infini, on a $u_2 = W$.

Si θ_1 est constant, θ_2 l'est aussi : le mouvement apparent est alors uniforme, comme le mouvement absolu.

19. *Accélération et force.* — On a d'une part, pour ce cas,

$$d\theta_1 = d\theta_2; \tag{34}$$

on a d'autre part, en tenant compte de la relation (33),

$$\frac{W\,dt_1}{\operatorname{ch}\theta_1} = \frac{W\,dt_2}{\operatorname{ch}\theta_2}; \tag{35}$$

en divisant membre à membre ces deux relations, et en multipliant par W^2, on définit une quantité remarquable

$$\gamma = W \operatorname{ch}\theta_1 \frac{d\theta_1}{dt_1} = W \operatorname{ch}\theta_2 \frac{d\theta_2}{dt_2}$$

ou mieux

$$\gamma = W \frac{d}{dt_1}(\operatorname{sh}\theta_1) = W \frac{d}{dt_2}(\operatorname{sh}\theta_2), \tag{36}$$

et cette quantité se trouve être, pour le cas particulier envisagé, celle que l'on a désignée au début sous le nom d'accélération totale [1] : *l'accélération totale est ici la même, soit que l'on considère le mouvement absolu du point matériel dans le système* (Σ_1), *soit que l'on considère le mouvement apparent de ce point dans le système* (Σ_2).

On a encore

$$F_1 = F_2 = \mu\gamma. \tag{37}$$

20. *Emploi du diagramme de Minkowski.* — Si l'on écrit

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \cos(-i\varphi) + iWt_2 \sin(-i\varphi), \\ iWt_1 &= -x_2 \sin(-i\varphi) + iWt_2 \cos(-i\varphi), \end{aligned}$$

en posant

$$l_1 = iWt_1, \qquad l_2 = iWt_2,$$

les formules de Lorentz (bornées à ce qui concerne x et t) prennent la forme suivante due à Minkowski :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_2 \cos(-i\varphi) - x_2 \sin(-i\varphi), \\ x_1 &= l_2 \sin(-i\varphi) + x_2 \cos(-i\varphi); \end{aligned}$$

ce sont les formules de transformation de coordonnées pour deux

---

[1] Je suis parti de la formule (36) pour écrire la formule (2).

systèmes d'axes rectangulaires (Ol_1, Ox_1) et (Ol_2, Ox_2), l'angle (Ol_1, Ol_2) ayant la valeur $-i\varphi$.

Si un point matériel se meut sur la droite qui porte les axes O_1x_1 et O_2x_2, comme il a été dit précédemment, *le diagramme du mouvement absolu (système Σ_1) donné par les axes Ol_1, Ox_1, et le diagramme du mouvement apparent (système Σ_2) donné par les axes Ol_2, Ox_2, sont une seule et même courbe* (Γ).

21. On a, relativement à la vitesse,

$$\frac{dx_1}{dl_1} = \frac{1}{i}\,\mathrm{th}\,\theta_1 = -i\,\mathrm{th}\,\theta_1 = \mathrm{tang}(-i\theta_1), \qquad \frac{dx_2}{dl_2} = \ldots;$$

ainsi $-i\theta_1$ et $-i\theta_2$ sont les angles (Ol_1, δ) et (Ol_2, δ), δ étant la tangente à la courbe (Γ), et cela donne immédiatement

$$-i\theta_1 = -i\theta_2 + (-i\varphi) \qquad \text{ou} \qquad \theta_1 = \theta_2 + \varphi;$$

c'est la formule (33).

22. Pour l'accélération, chacun des deux membres de la relation (34) multiplié par $-i$ mesure l'angle de contingence de la courbe (Γ), chacun des rapports (35) multipliés par i, soit

$$\frac{dl_1}{\cos(-i\theta_1)}, \qquad \frac{dl_2}{\cos(-i\theta_2)},$$

mesure la différentielle de l'arc, de sorte que *l'accélération γ est égale au produit par $-W^2$ de la courbure de la courbe* (Γ) *qui est le diagramme du mouvement rectiligne considéré.*

On peut écrire, en introduisant par exemple $\frac{dV_1}{dt_1}$,

$$\begin{aligned}\gamma &= \mathrm{ch}^3\theta_1 \frac{dV_1}{dt_1}\\ &= \mathrm{ch}^3\theta_1 \frac{d^2x_1}{dt_1^2} = -W^2\,\mathrm{ch}^3\theta_1 \frac{d^2x_1}{dl_1^2}\end{aligned}$$

ou encore (je supprime l'indice 1)

$$\gamma = -W^2 \frac{x''}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

les accents indiquent des dérivées prises par rapport à l; la fraction qui figure au second membre de cette égalité mesure bien la courbure de la courbe (Γ).

23. *Impulsion et travail.* — On peut écrire

$$d\theta_1 = d\theta_2, \tag{34}$$

$$\frac{W\,dt_1}{\operatorname{ch}\theta_1} = \frac{dx_1}{\operatorname{sh}\theta_1} = \frac{W\,dt_2}{\operatorname{ch}\theta_2} = \frac{dx_2}{\operatorname{sh}\theta_2}; \tag{35}$$

on en déduit

$$W\frac{d}{dt_1}\operatorname{sh}\theta_1 = W^2\frac{d}{dx_1}\operatorname{ch}\theta_1 = W\frac{d}{dt_2}\operatorname{sh}\theta_2 = \ldots = \frac{F}{\mu},$$

et par suite

$$\int F\,dt_1 = \mu W(\operatorname{sh}\theta_1 - \ldots), \qquad \int F\,dt_2 = \ldots, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\int F\,dx_1 &= \mu W^2[(\operatorname{ch}\theta_1 - 1) - \ldots] \\ &= 2\mu W^2\left(\operatorname{sh}^2\frac{\theta_1}{2} - \ldots\right], \qquad \int F\,dx_2 = \ldots\end{aligned} \tag{39}$$

24. *Cas d'une force constante.* — Si la force est constante, et si les conditions initiales correspondent aux valeurs

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \quad x_1 = 0, \quad \theta_1 = 0, \\ t_2 &= 0, \quad x_2 = 0, \quad \theta_2 = -\varphi, \end{aligned}$$

on a par exemple dans le système (Σ_1), où la vitesse initiale est nulle,

$$\begin{aligned} F t_1 &= \mu W \operatorname{sh}\theta_1, \\ F x_1 &= \mu W^2(\operatorname{ch}\theta_1 - 1); \end{aligned}$$

si t_1 augmente indéfiniment, il en est de même de θ_1 de sorte que la vitesse $W\operatorname{th}\theta_1$ tend vers W ; x_1 augmente indéfiniment.

L'élimination de θ_1 entre les deux relations précédentes donne l'équation du mouvement ; en écrivant

$$\frac{x_1}{W^2} = \frac{\mu}{F}\left(-1 + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\theta_1}\right),$$

on a

$$\frac{x_1}{W^2} = -\frac{\mu}{F} + \sqrt{\frac{\mu^2}{F^2} + \frac{t_1^2}{W^2}}; \tag{40}$$

on a d'ailleurs

$$u_1 = \frac{t_1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{F^2} + \frac{t_1^2}{W^2}}} \tag{41}$$

25. *Cas d'un mouvement quelconque. Vitesses.* — Nous laisserons pour le moment les formules de Lorentz sous la forme

$$(A)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 + \lambda W t_2}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \qquad y_1 = y_2, \qquad z_1 = z_2, \\[2ex] t_1 = \dfrac{t_2 + \lambda \dfrac{x_2}{W}}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \dfrac{1}{W}. \end{cases}$$

On a d'abord

$$(B)\qquad \frac{dt_1}{dt_2} = \frac{1 + \lambda \dfrac{u_2}{W}}{\sqrt{1-\lambda^2}};$$

pour prendre une dérivée par rapport à t_1, on pourra prendre la dérivée par rapport à t_2 et multiplier le résultat par l'inverse du second membre de cette formule.

Si l'on pose (avec la date locale pour l'indice 2)

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt},$$

en observant avec soin que, dans les rapports $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, dt est relatif au mouvement du point sur la trajectoire, de sorte que v *et* w *sont des projections de vitesse et non des vitesses de mouvement projeté*, on a

$$(B')\qquad u_1 = \frac{u_2 + \lambda W}{1 + \lambda \dfrac{u_2}{W}}, \qquad v_1 = \frac{v_2\sqrt{1-\lambda^2}}{1 + \lambda \dfrac{u_2}{W}}, \qquad w_1 = \frac{w_2\sqrt{1-\lambda^2}}{1 + \lambda \dfrac{u_2}{W}};$$

on a les formules inverses en échangeant les indices et en remplaçant λ *par* $-\lambda$. Ces formules ont été données pour la première fois par Einstein.

On peut écrire

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{1 - \lambda \dfrac{u_1}{W}}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{1 + \lambda \dfrac{u_2}{W}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2};$$

la relation qui lie u_1 et u_2 est ici sous la forme

$$\left(1-\lambda\frac{u_1}{W}\right)\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)=1-\lambda^2;$$

les relations

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{dt_2}{dt_1}$$

sont immédiates.

Si l'on calcule V_1^2, on trouve

$$V_1^2=\frac{(1-\lambda^2)(V_2^2-W^2)+(\lambda u_2+W)^2}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^2},$$

ou, en séparant les deux termes du second membre,

$$V_1^2-W^2=\frac{(1-\lambda^2)(V_2^2-W^2)}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^2};$$

en divisant par W^2 et en changeant les signes des deux membres, il vient

$$\left(1-\frac{V_1^2}{W^2}\right)=\frac{1-\lambda^2}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^2}\left(1-\frac{V_2^2}{W^2}\right).$$

Cela permet de compléter les relations ci-dessus et l'on a

$$(B'')\qquad \frac{dt_2}{dt_1}=\frac{1-\lambda\frac{u_1}{W}}{\sqrt{1-\lambda^2}}=\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda\frac{u_2}{W}}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{W^2}}}{\sqrt{1-\frac{V_2^2}{W^2}}}.$$

26. *Dérivées de la vitesse.* — Nous comparerons plus loin les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la force F_1 et les composantes X_2, Y_2, Z_2 de la force F_2, ce qui revient à comparer, avec les indices 1 et 2, les quantités γ_x, γ_y, γ_z définies par les formules (7). Nous donnerons ici, bien que nous devions très peu en faire usage, les formules de transformation relatives aux quantités

$$u'_1=\frac{du_1}{dt_1},\qquad \ldots,\qquad u'_2=\frac{du_2}{dt_2},\qquad \ldots.$$

Ces formules sont

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} u'_1 &= \frac{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^3}u'_2,\\ v'_1 &= (1-\lambda^2)\left[\frac{v'_2}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^2}-\frac{\lambda}{W}\frac{v_2u'_2}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^3}\right],\\ w'_1 &= (1-\lambda^2)\left[\frac{w'_2}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^2}-\frac{\lambda}{W}\frac{w_2u'_2}{\left(1+\lambda\frac{u_2}{W}\right)^3}\right]; \end{aligned}\right.$$

on a les formules inverses en échangeant les indices et en remplaçant λ par $-\lambda$.

27. *Force.* — Nous appliquerons à chacun des deux systèmes (Σ_1) et (Σ_2) les équations (24) multipliées par μ, ou encore les équations (28) écrites sous la forme

$$(42)\qquad X = \frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}}\left[u'+\frac{VV'}{W^2-V^2}u\right],\qquad \ldots.$$

28. *Examen d'un cas particulier.* — Considérons un point matériel d'abord immobile dans le système (Σ_2); on a alors

$$u_2 = v_2 = w_2 = 0,$$
$$u_1 = \lambda W,\qquad v_1 = w_1 = 0.$$

Si l'on vient à lui appliquer une force F_2 aux composantes X_2, Y_2, Z_2, à laquelle correspond dans le système (Σ_1) une force F_1 aux composantes X_1, Y_1, Z_1, on aura au départ entre les accélérations les relations

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} u'_1 &= (1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}u'_2,\\ v'_1 &= (1-\lambda^2)\ v'_2,\\ w'_1 &= (1-\lambda^2)\ w'_2. \end{aligned}\right.$$

Or on a d'une part

$$(44)\qquad X_2 = \mu u'_2,\qquad Y_2 = \mu v'_2,\qquad Z_2 = \mu w'_2,$$

et d'autre part

$$(45)\qquad X_1 = \frac{\mu u'_1}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad Y_1 = \frac{\mu v'_1}{\sqrt{1-\lambda^2}},\qquad Z_1 = \frac{\mu w'_1}{\sqrt{1-\lambda^2}};$$

ces valeurs peuvent se déduire des formules (42) dans lesquelles on fait, pour l'indice 1, $u_1 = V_1 = \lambda W$.

On obtient donc

$$(46) \qquad X_1 = X_2, \qquad Y_1 = Y_2\sqrt{1-\lambda_2}, \qquad Z_1 = Z_2\sqrt{1-\lambda^2}.$$

29. Les formules (45) peuvent s'écrire

$$(47) \qquad X_1 = m_L u'_1, \qquad Y_1 = m_T v'_1, \qquad Z_1 = m_T w'_1,$$

m_L et m_T étant relatifs au système (Σ_1). La première de ces formules se comprend bien : la tangente à la trajectoire au début du mouvement étant parallèle à $O_1 x_1$, on peut écrire (n° 13)

$$X_1 = F_L = m_L \frac{dV_1}{dt};$$

or la formule

$$V_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$$

donne ici $V'_1 = u'_1$.

Dans l'opuscule de M. Lémeray (*Le principe de relativité*), on écrit *a priori* les formules (44) et (47). Comme, dans l'étude de la Statique, en supposant le point matériel maintenu immobile dans le système (Σ_2) malgré l'action de la force F_2, on a écrit précédemment

$$\frac{Y_1}{X_1} : \frac{Y_2}{X_2} = \frac{Z_1}{X_1} : \frac{Z_2}{X_2} = \sqrt{1-\lambda^2},$$

on obtient

$$\frac{m_T v'_1}{m_L u'_1} : \frac{v'_2}{u'_2} = \sqrt{1-\lambda^2},$$

et les relations (43) donnent dans le système (Σ_1)

$$\frac{m_T}{m_L} = 1 - \lambda^2.$$

C'est de ce résultat particulier que l'on s'autorise pour écrire la relation générale

$$\frac{m_L}{m_T} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{W^2}}$$

qui sert à déterminer les valeurs des quantités m_L et m_T.

30. *Transformation des forces dans le cas général.* — On a,

d'après (42),

$$(48)\qquad \frac{Y}{v} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}}\left[\frac{v'}{v} + \frac{VV'}{W^2-V^2}\right]$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{W^2}}}\,\frac{d}{dt}\,\mathrm{Log}\,\frac{v}{\sqrt{W^2-V^2}}.$$

Si l'on applique cette formule avec les indices 1 et 2, les deux quantités soumises au logarithme étant égales d'après les relations (B''), on a

$$\frac{Y_1}{v_1} : \frac{Y_2}{v_2} = \frac{\sqrt{W^2-V_2^2}}{\sqrt{W^2-V_1^2}}\,\frac{dt_2}{dt_1} = 1,$$

et par suite

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

On peut écrire

$$(D)\qquad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1-\lambda\frac{u_1}{W}}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda\frac{u_2}{W}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{W^2}}}{\sqrt{1-\frac{V_2^2}{W^2}}}.$$

Avec $u_2 = 0$, d'où résulte $u_1 = \lambda W$, on a

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{-\lambda^2},$$

comme dans les deux dernières formules (46).

31. Pour X_1 et X_2, nous écrirons, en appliquant la formule (24) avec l'indice 2, et les formules (B), (B'), (B''),

$$X_2 = \mu\frac{d}{dt_2}\left(\frac{u_2}{\sqrt{1-\frac{V_2^2}{W^2}}}\right)$$

$$= \frac{\mu\sqrt{1-\lambda^2}}{1-\lambda\frac{u_1}{W}}\,\frac{d}{dt_1}\left(\frac{u_1-\lambda W}{1-\lambda\frac{u_1}{W}}\,\frac{1-\lambda\frac{u_1}{W}}{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{W^2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)$$

$$= \frac{\mu}{1-\lambda\frac{u_1}{W}}\,\frac{d}{dt_1}\left(\frac{u_1-\lambda W}{\sqrt{1-\frac{V_1^2}{W^2}}}\right).$$

Si l'on écrit

$$X_2 = \frac{1}{1 - \lambda \frac{u_1}{W}} \left[\mu \frac{d}{dt_1} \frac{u_1}{\sqrt{\ldots}} - \frac{\lambda}{W} \mu W^2 \frac{d}{dt_1} \frac{1}{\sqrt{\ldots}} \right],$$

en appliquant la formule (24) avec l'indice 1, et la formule (29), on obtient

$$(D') \qquad X_2 = \frac{1}{1 - \lambda \frac{u_1}{W}} \left[X_1 - \frac{\lambda}{W} (u_1 X_1 + v_1 Y_1 + w_1 Z_1) \right];$$

on peut échanger les indices 1 et 2 en remplaçant λ par $-\lambda$.

On peut écrire

$$(D'') \qquad X_1 - X_2 = \frac{\lambda}{W} \frac{v_1 Y_1 + w_1 Z_1}{1 - \lambda \frac{u_1}{W}} = \frac{\lambda}{W} \frac{v_2 Y_2 + w_2 Z_2}{1 + \lambda \frac{u_2}{W}}.$$

Avec $v_2 = 0$, $w_2 = 0$, d'où résulte $v_1 = 0$, $w_1 = 0$, on a $X_1 = X_2$ comme dans la première des formules (46).

32. *Emploi d'arguments hyperboliques.* — Nous poserons, avec les indices 1 et 2,

$$(49) \qquad \frac{u}{W} = \operatorname{th} \theta, \qquad \frac{V}{W} = \operatorname{th} \Theta.$$

On a alors, comme au n° 18,

$$(50) \qquad \theta_2 = \theta_1 - \varphi$$

et les formules (B″) deviennent

$$(51) \qquad \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{\operatorname{ch} \theta_2}{\operatorname{ch} \theta_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\operatorname{ch} \Theta_2}{\operatorname{ch} \Theta_1}.$$

Après avoir obtenu comme au n° 19 la relation

$$\frac{dt_2}{\operatorname{ch} \theta_2} = \frac{dt_1}{\operatorname{ch} \theta_1} = \delta,$$

on peut écrire

$$W^2 \operatorname{th}^2 \Theta_2 = W^2 \operatorname{th}^2 \theta_2 + \frac{dy^2 + dz^2}{dt_2^2},$$

ou, en remplaçant dt_2 par $\delta \operatorname{ch} \theta_2$ et en multipliant par $\operatorname{ch}^2 \theta_2$,

$$W^2 \operatorname{ch}^2 \theta_2 \operatorname{th}^2 \Theta_2 = W^2 \operatorname{ch}^2 \theta_2 - W^2 + \frac{dy^2 + dz^2}{\delta^2},$$

ou encore

$$W^2 \operatorname{ch}^2 \theta_2 (1 - \operatorname{th}^2 \Theta_2) = W^2 - \frac{dy^2 + dz^2}{\delta^2};$$

on en déduit

$$\frac{\operatorname{ch}^2\theta_2}{\operatorname{ch}^2\Theta_2} = \frac{\operatorname{ch}^2\theta_1}{\operatorname{ch}^2\Theta_1}.$$

On peut écrire

$$(52)\qquad \frac{W\,dt_1}{\operatorname{ch}\Theta_1} = \frac{ds_1}{\operatorname{sh}\Theta_1} = \frac{W\,dt_2}{\operatorname{ch}\Theta_2} = \frac{ds_2}{\operatorname{sh}\Theta_2},$$

ce qui généralise les relations (35) du n° 23; *mais la relation* (34) *n'a pas ici son analogue.*

La formule (9) donne

$$F'_1 = \mu W \operatorname{ch}\Theta_1 \frac{d\Theta_1}{dt_1},$$

$$F'_2 = \mu W \operatorname{ch}\Theta_2 \frac{d\Theta_2}{dt_2},$$

et l'on a

$$(53)\qquad \frac{d\Theta_1}{F'_1} = \frac{d\Theta_2}{F_2};$$

il y a là un invariant intéressant.

33. *L'identité de Minkowski.* — Si l'on élimine (φ) entre les formules de Lorentz (formules 30), on obtient

$$x_1^2 - W^2 t_1^2 = x_2^2 - W^2 t_2^2$$

soit en écrivant

$$\frac{x_1 - W t_1}{x_2 - W t_2} = \operatorname{ch}\varphi - \operatorname{sh}\varphi = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{sh}\varphi} = \frac{x_2 + W t_2}{x_1 + W t_1},$$

soit directement; on a donc l'identité

$$(54)\qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - W^2 t_1^2 = x_2^2 + \ldots + \ldots - W^2 t_2^2.$$

Plus généralement, on a l'identité

$$(55)\qquad x_1 x'_1 + \ldots + \ldots - W^2 t_1 t'_1 = x_2 x'_2 + \ldots + \ldots - W^2 t_2 t'_2.$$

On en déduit l'identité générale

$$(56)\qquad \begin{aligned}(x'_1 - x_1)^2 + \ldots + \ldots - W^2(t'_1 - t_1)^2 \\ = (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + \ldots - W^2(t'_2 - t_2)^2.\end{aligned}$$

Cette identité résulte immédiatement de la forme donnée par Minkowski aux formules de Lorentz : la transformation de Lorentz, avec x, y, z, et $l = iWt$, est une transformation orthogonale.

34. Cela posé, si un point matériel parcourt dans le système (Σ_2) le chemin apparent MN, t_2 étant la date au chronomètre

du point M lors de son passage en M, ..., si d'autre part il a parcouru dans le système (Σ_1) le chemin absolu MN', on peut écrire

$$V_2 = \frac{[MN]}{t'_2 - t_2} = W \operatorname{th}\Theta_2, \qquad V_1 = \frac{\overline{MN'}}{t'_1 - t_1} = W \operatorname{th}\Theta_1,$$

[MN] désignant la mesure du vecteur MN faite avec les règles contractées du système (Σ_2). L'identité (56) donne alors

$$(t'_1 - t_1)^2 \left[\frac{\overline{MN}^2}{W^2 (t'_1 - t_1)^2} - 1 \right] = \ldots,$$

ou, en changeant les signes des deux membres,

$$(t'_1 - t_1)^2 (1 - \operatorname{th}^2\Theta_1) = \ldots,$$

ou enfin

$$\frac{t'_1 - t_1}{\operatorname{ch}\Theta_1} = \frac{t'_2 - t_2}{\operatorname{ch}\Theta_2}.$$

On peut écrire

$$(57) \qquad \frac{W(t'_1 - t_1)}{\operatorname{ch}\Theta_1} = \frac{\overline{MN'}}{\operatorname{sh}\Theta_1} = \frac{W(t'_2 - t_2)}{\operatorname{ch}\Theta_2} = \frac{[MN]}{\operatorname{sh}\Theta_2},$$

et l'on comprend mieux ainsi ce que représente ds_2 dans les formules (52).

[L'identité de Minkowski répond à ce fait qui a été le point de départ des idées relativistes : la vitesse apparente de la lumière dans un système en mouvement (Σ_2) est égale à la vitesse absolue de la lumière dans un système en repos (Σ_1).]

Note sur la composition des vitesses. — Pour un point matériel en mouvement sur la droite qui porte les axes O_1x_1 et O_2x_2, on a la formule (33), que nous écrirons sous la forme

$$\theta_1 = \theta_2 + \varphi.$$

La vitesse du point par rapport au système (Σ_2) étant $W \operatorname{th}\theta_2$, celle du système (Σ_2) par rapport au système (Σ_1) étant $W \operatorname{th}\varphi$, la vitesse du point par rapport au système (Σ_1) est $W \operatorname{th}(\theta_2 + \varphi)$: *les arguments hyperboliques s'ajoutent.*

On peut dire encore : les systèmes (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) étant soumis à des translations rectilignes parallèles, il résulte des formules (31) que, si les vitesses du dernier système par rapport au second et du second par rapport au premier sont $W \operatorname{th}\varphi'$ et $W \operatorname{th}\varphi$, la vitesse du dernier système par rapport au premier est $W \operatorname{th}(\varphi' + \varphi)$.

Sans employer ici les arguments hyperboliques, considérons un point mobile sur la droite qui porte les axes O_1x_1, O_2x_2, suivant la loi

$$x_2 = V_2 t_2;$$

si on laisse les formules de Lorentz sous la forme

$$x_1 = \frac{x_2 - U t_2}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \qquad t_1 = \frac{t_2 - \frac{U}{W}\frac{x_2}{W}}{\sqrt{1-\lambda^2}},$$

avec $\lambda = \frac{U}{W}$, on obtient

$$x_1 = V_1 t_1,$$

$$(58) \qquad V_1 = \frac{U + V_2}{1 + \frac{U}{W}\frac{V_2}{W}}.$$

Si la vitesse U est faible par rapport à W, on a sensiblement

$$V_1 = (U + V_2)\left(1 - \frac{UV_2}{W^2}\right) = U + V_2 - \frac{U^2 V_2}{W^2} - \frac{UV_2^2}{W^2}$$

ou encore

$$(59) \qquad V_1 = V_2 + U\left(1 - \frac{V_2^2}{W^2}\right) = V_2 + U\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

en posant

$$\frac{1}{n} = \frac{V_2}{W}.$$

« Or, écrit M. Einstein [1], supposons que la lumière se propage dans un certain fluide immobile avec la vitesse V_2; avec quelle vitesse V_1 se propagera-t-elle dans un tuyau parcouru par le même fluide avec la vitesse U? Nous devons supposer, conformément au principe de la relativité, que la lumière se propage toujours avec la même vitesse *par rapport au fluide*, que ce fluide soit en mouvement ou non par rapport à d'autres corps. La vitesse de la lumière par rapport au tuyau est alors donnée par la formule (58), ou d'une manière approchée par la formule (59). C'est précisément le résultat obtenu par Fizeau il y a plus d'un demi-siècle et ensuite par Michelson et Morley. » Ce résultat avait été prévu par Fresnel à l'aide d'autres considérations; il envisageait une loi de la nature, qui se trouve vérifier le principe de relativité.

---

[1] Dans l'opuscule qui a pour titre : *La théorie de la relativité restreinte et généralisée.*

DISCOURS D'OUVERTURE DE LA SIXIÈME CONFÉRENCE GÉNÉRALE DES POIDS ET MESURES, PRONONCÉ LE 27 SEPTEMBRE 1921, AU MINISTÈRE DES AFFAIRES ÉTRANGÈRES, EN PRÉSENCE DE M. LE MINISTRE DU COMMERCE;

PAR M. ÉMILE PICARD,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences,
Président de la Conférence.

MONSIEUR LE MINISTRE, MESSIEURS,

En souvenir de la création du Système métrique par les savants français de la fin du XVIIIe siècle, la Convention internationale des Poids et Mesures de 1875 a décidé que la Conférence générale des Poids et Mesures se tiendrait à Paris, tous les six ans au moins, sous la présidence du Président en exercice de l'Académie des Sciences ou de son représentant. C'est un honneur dont l'Académie sent tout le prix; à défaut de son Président retenu loin de Paris, elle a chargé son Secrétaire perpétuel pour les sciences mathématiques de diriger, cette année, les travaux de la Conférence. La dernière réunion de cette Assemblée a eu lieu en 1913, mais les évènements qui viennent de changer la face du monde n'avaient pas permis de vous convoquer plus tôt. Les traités de paix n'ayant pas modifié le fonctionnement de l'œuvre, à la fois économique et scientifique, que poursuit le Comité international des Poids et Mesures, et le Bureau de Sèvres ayant à peu près repris son activité coutumière, il a paru que la Conférence générale pouvait être utilement réunie. Aussi ai-je l'honneur, au nom de l'Académie des Sciences de Paris, de souhaiter la bienvenue aux délégués des nations adhérentes à la Convention internationale du Mètre, parmi lesquels j'ai plaisir à saluer les représentants de deux nouveaux pays adhérents : le Brésil et la Finlande.

Permettez-moi également de m'associer aux regrets qui viennent d'être exprimés, et que nous cause la perte des collègues disparus depuis la dernière session. Je tiens aussi à dire à M. Benoît, qui a demandé en 1914 à être déchargé de ses fonctions de Directeur, que son nom reste à jamais inscrit dans l'histoire du Bureau inter-

national des Poids et Mesures, et que nos très vives sympathies suivent dans sa retraite l'éminent initiateur de tant de travaux entrepris dans la maison de Sèvres, dont il reste le Directeur honoraire.

Messieurs, la science est une arme puissante, indifférente au mal comme au bien, on ne l'a que trop vu pendant quelques années. Notre vœu le plus cher, à nous tous qui sommes ici réunis, est que, rendue à ses fins bienfaisantes, elle ne cesse plus d'être cet outil de merveilleux service, dont parlait déjà notre vieux Montaigne, qui contribue à l'amélioration des conditions de la vie et fournit un des signes les moins contestables des progrès de l'humanité, tout en restant la grande parure dont l'idéal reflète la curiosité passionnée et désintéressée qui est l'honneur de l'esprit humain.

Dans maintes recherches scientifiques, l'âge héroïque est passé, où avec un matériel très simple on pouvait faire de grandes découvertes. Quoique tout reste possible aux hommes de génie qui, de loin en loin, ouvrent des voies nouvelles avec des moyens de fortune, le progrès scientifiques résulte le plus souvent aujourd'hui de longs et patients efforts, qu'il s'agisse de laborieux calculs, ou de minutieuses observations et expériences. L'astronome trouve à peine suffisant le centième de seconde, et des mesures sur des quantités infiniment petites lui sont nécessaires pour évaluer l'infiniment grand ; le physicien apporte une extrême précision dans la recherche des densités et trouve des gaz nouveaux dans l'atmosphère ; le chimiste modifie nos idées sur les éléments avec les nombreuses décimales des masses atomiques et les corps isotopes.

Nous ne croyons plus guère au dogme de la simplicité des lois de la nature, qui enchantait nos prédécesseurs et qui a rendu tant de services aux sciences naissantes, tout en l'utilisant cependant encore de façon plus ou moins consciente. Nous accumulons approximations sur approximations, mais un des articles de notre foi scientifique est que ces approximations successives sont convergentes, comme disent les mathématiciens, et que nous approchons sans cesse d'un petit nombre de vérités toujours plus compréhensives, synthèses des nombreuses vérités partielles peu à peu découvertes. C'est peut-être une chimère, mais elle soutient des générations de chercheurs dans leur labeur jamais terminé.

Où trouverait-on un plus bel exemple de la patience inlassable

du savant que parmi les métrologistes, en lutte tous les jours avec une matière en apparence inerte mais se transformant cependant comme un être vivant? Au milieu de l'universelle mobilité, les métrologistes veulent réaliser des étalons permanents. Je suppose qu'ils ne doivent guère être partisans de la théorie de la relativité, ni aimer à entendre dire que les dimensions de leur règle changent avec l'orientation et que leur longueur d'onde elle-même ne représente peut-être pas l'élément fixe sur lequel ils comptaient. Ces variations, si tant est qu'elles soient réelles, sont heureusement en dehors de nos mesures, et les préoccupations que peut avoir le Bureau international tiennent à d'autres causes. Je lis, par exemple, dans un des rapports qui vous ont été envoyés, que les étalons d'usage du Bureau ont subi par rapport au prototype international et à certains prototypes nationaux un allongement d'environ quatre dixièmes de micron ; on a suggéré que cette variation s'est peut-être produite progressivement et qu'elle provient d'une usure dissymétrique des traits, due aux nettoyages fréquents. Quoi qu'il en soit, des causes nombreuses, dont plusieurs sont sans doute bien difficiles à déterminer, peuvent ainsi modifier étalons et prototypes, et des comparaisons fréquentes et variées sont nécessaires, d'autant que l'on a parfois, comme pour l'unité de masse, la prétention d'aller jusqu'au cent-millionième.

Ce contrôle incessant est la partie essentielle du travail que le Bureau international effectue sous la direction de M. Guillaume, l'éminent physicien, qui vient de couronner ses recherches sur les alliages par la découverte d'une nouvelle combinaison métallique, *l'élinvar*, précieuse pour l'horlogerie, dont le module d'élasticité est à peu près indépendant de la température.

L'étude des étalons à bout si utiles pour l'industrie, qui touche à des questions délicates d'élasticité, a été, dans ces dernières années, continuée à Sèvres avec un grand succès. On sait aussi l'intérêt que présentent les recherches sur les matières propres à la construction des étalons ; les travaux du Bureau sur ce sujet ont conduit également à des résultats remarquables. Nous pouvons donc féliciter ceux qui collaborent à l'œuvre du Pavillon de Breteuil de l'activité qu'ils ont dépensée dans des circonstances difficiles et des importants travaux qu'ils ont réussi à mener à bien. A lire les publications du Bureau, on pourrait croire que le nombre

des travailleurs y est beaucoup plus considérable ; l'ardeur du Chef se communique à ceux qui sont autour de lui.

Messieurs, la session de la Conférence qui s'ouvre aujourd'hui a un programme chargé et important. Jusqu'ici, comme vous le savez, l'activité du Bureau se rapporte officiellement aux seules grandeurs inscrites en 1875 dans les lois relatives aux unités, celle de longueur et celle de masse. Depuis lors, les lois sur les unités ont été, dans certains pays, quelque peu élargies, de nouvelles applications de la science réclamant des unités spéciales; ainsi une loi française récente, relative au système M. T. S., définit, outre les unités de longueur, de masse et de temps, les unités de résistance électrique et d'intensité lumineuse, considérées comme unités principales. Aussi la question a-t-elle été depuis longtemps soulevée d'étendre officiellement les attributions du Bureau à l'établissement et à la conservation des étalons se rapportant à des unités intéressant les divers domaines qui exigent des mesures précises, ainsi qu'à la recherche de certaines constantes physiques.

Il semble, en premier lieu, que l'importance de l'électricité dans l'industrie mondiale soit assez grande aujourd'hui pour que ses mesures aient, comme les longueurs et les masses, un Bureau central ; on jugera, sans doute, que l'idée d'avoir deux organes distincts ne serait pas heureuse à une époque où les diverses parties de la science deviennent de plus en plus solidaires, et que le Bureau de Sèvres doit être chargé de cette fonction convenablement délimitée. Quant à la détermination des constantes physiques, elle a été de tout temps dans les attributions du Bureau ; il suffit de citer les dilatations de l'eau, du mercure, du quartz et d'autres cristaux, des métaux et alliages, les recherches de densités, du volume du kilogramme d'eau, et enfin les longueurs d'ondes lumineuses qui sont devenues le véritable micromètre de haute précision. C'est qu'en effet les problèmes de métrologie sont extrêmement complexes. Pour comparer des longueurs et des masses, il faut, en dehors de l'opération, ramener les résultats à des conditions normales, et ceci exige la connaissance de constantes numériques, exprimant des propriétés de la matière, qui doivent être obtenues avec une précision correspondant à celle de la comparaison elle-même. Et, comme cette précision s'accroît d'année en année, il faut, de temps à autre, faire une nouvelle

détermination des constantes ; on peut ainsi gagner, à ce qu'assurent les métrologistes les plus autorisés, une décimale environ tous les cinquante ans. La détermination des constantes physiques a donc joué un grand rôle dans l'activité du Bureau depuis sa fondation. C'est pourquoi il importe que ce rôle soit indiqué d'une manière explicite dans la Convention. Tout à la fois, on sanctionnera ainsi le passé, et l'on préparera les voies de l'avenir.

Les questions de budget sont particulièrement difficiles en ce moment. Comme tant d'autres, le budget du Bureau international des Poids et Mesures ne peut être établi aujourd'hui dans les conditions antérieures, en supposant même que rien ne soit changé dans son fonctionnement. En fixant les augmentations nécessaires, vous aurez de plus à rechercher, au moins provisoirement, la part due à l'extension des attributions du Bureau, si celle-ci est décidée. Les transformations projetées demanderont beaucoup de prudence, mais nous pouvons compter sur la sagesse et l'esprit de réalisation du Comité international dont la gestion a toujours été si heureuse.

Une question se posera, quant au nombre des membres du Comité, qui était jusqu'ici de quatorze. Le nombre des États adhérents, primitivement de *dix-huit*, s'élevant maintenant à *vingt-huit*, on pourrait augmenter le nombre des membres du Comité, accroissement qui paraît d'autant plus nécessaire que l'extension des attributions du Bureau exigera des compétences nouvelles.

Sans parler des problèmes techniques, liés aux progrès de la métrologie qui profite de plus en plus des admirables découvertes faites chaque jour en physique, problèmes qui font partie du programme courant de vos réunions, divers règlements d'ordre financier et administratif doivent encore vous être présentés. La Conférence saura mener à bien la solution des questions très variées qui lui sont remises, et qui sont d'une haute importance pour l'avenir de l'œuvre internationale que nous poursuivons. L'accord sera facile dans le domaine serein de la Science ; c'est avec cette assurance que nous allons en toute confiance commencer nos travaux.

1ère partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

L. SILBERSTEIN. — ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE VECTORIELLE ET D'ANALYSE VECTORIELLE, traduit de l'anglais par G. Matisse. 1 vol. petit in-8° de VIII-130 pages et 22 fig. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921. Prix : 8f net.

Les Ouvrages sur le Calcul vectoriel semblent se multiplier rapidement. Il fut un temps où les mathématiciens considéraient ce calcul comme une construction qui pouvait permettre de brèves synthèses, mais qui ne faisait jamais que réexprimer des choses connues et d'une manière assez inféconde.

Le progrès de la Physique moderne et le langage de l'école d'Einstein exigent maintenant, tout au contraire, que l'on mette les théories vectorielles au premier plan.

Le Calcul fonctionnel les redonne d'ailleurs aussi et la classique théorie des fonctions analytiques d'une variable est l'étude d'un champ vectoriel à deux dimensions. Quant aux fonctions de deux variables, elles exigent un continuum à quatre dimensions fort analogue au très vectoriel espace-temps de Minkowski.

Ici nous ne dominerons point ces hautes régions. Le petit volume de L. Silberstein est manifestement un Ouvrage d'initiation. Il distingue une Algèbre et une Analyse vectorielles. L'algèbre, par ses opérations fondamentales combine les vecteurs comme la géométrie élémentaire combine les éléments de ses figures et de nombreuses comparaisons avec la trigonométrie plane ou sphérique illustrent précisément ce point de vue en montrant que la théorie n'a même point besoin d'attendre la forme physique pour révéler son utilité.

Le *produit vectoriel*, qui change de signe par interversion des facteurs, n'a rien de spécial. Que, dans un plan yOx, on trace un rectangle ABCD de côtés parallèles aux axes. Si l'on appelle *aire* du rectangle le produit de deux côtés consécutifs, cette aire peut, tout naturellement, avoir un signe. Ainsi $AB = a$, $BC = b$ et $AB.BC = ab$ étant positifs, il n'en sera pas de même de

BC.CD $= ba$ parce que CD est compté, par rapport à Ox, dans un sens contraire à celui de AB. Que ce rectangle devienne l'élément $dxdy$ d'une intégrale double et il en sera encore ainsi, si bien qu'approfondir ladite notion de produit vectoriel, c'est aborder correctement les notions d'aire et d'intégrale double.

La notion de produit vectoriel s'étend d'ailleurs dans l'espace avec un très élégant recours à la théorie des déterminants.

Les *opérateurs vectoriels* ϖ, tels que

$$\varpi(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \varpi\mathbf{A} + \varpi\mathbf{B}$$

sont le point de départ d'une véritable algèbre avec *invariants* attachés à la considération d'équations algébriques. Avec les *diades* et *diadiques*, nous parvenons à une algèbre polynomiale en laquelle les monomes constitutifs dépendent de l'ordre de leurs facteurs mais qui n'est qu'une heureuse forme d'une écriture où un algébriste ordinaire introduirait de grandes complications analogues à des -1 pourvus d'exposants des plus touffus.

L'analyse vectorielle se comprendra sans peine après de tels préliminaires.

Elle a trait à la différentiation et à l'intégration des vecteurs. Nous y retrouvons les opérateurs habituels de la Physique mathématique, les formules fondamentales de Green et de Stokes. Sans doute celles-ci commencent à être franchement insuffisantes ; les considérations modernes exigent qu'on les étende dans l'espace-temps. Mais répétons que l'élégant petit ouvrage de L. Silberstein est un ouvrage d'initiation qui atteint d'ailleurs son but en ne demandant au lecteur que de bien minimes efforts.

Le nom manifestement germanique de l'auteur ne l'a point empêché d'enseigner à l'Université de Rome d'où des œuvres qui furent publiées en anglais et nous reviennent maintenant traduites en français. Ces transformations internationales ont quelque chose qui semble merveilleusement s'accorder avec le caractère universel des théories vectorielles.

ADOLPHE BUHL.

COTTON (Émile). — Cours de Mécanique générale. Introduction a l'étude de la Mécanique industrielle (Bibliothèque de l'Élève-Ingénieur). Unités; Travail; Dynamique du point et des systèmes. Tome II, gr. in-8, 138 pages. Grenoble, Jules Rey; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920.

Ce second Volume du *Cours de Mécanique générale* de M. Cotton fait suite au premier fascicule du même Ouvrage, paru en 1914, et est rédigé dans le même but et dans le même esprit. Il s'agit d'un traité succinct, mais aussi clair et complet que possible, destiné aux élèves ingénieurs. L'Auteur ne suppose connues de ses lecteurs que les notions les plus élémentaires d'Analyse et de Géométrie analytique, formant les points fondamentaux du Cours de Mathématiques générales.

Le premier Volume de ce *Cours* a été analysé ici même (1) par M. G. Cotty, dont nous avons eu, peu après, à déplorer la mort prématurée. Je rappellerai seulement, pour mémoire, que, dans le premier Volume, après avoir exposé la théorie générale des vecteurs et la Géométrie des masses, M. Cotton exposait, en quelques belles pages, les « Principes » de la Mécanique, puis développait la Cinématique et la Statique.

La Dynamique du point et celle des systèmes forment l'objet principal du second Volume, dont nous nous occupons actuellement. Toutefois l'Auteur consacre un Chapitre préliminaire aux Unités (changements d'unités, homogénéité des formules), dont l'étude complète n'avait pas été faite dans la première Partie, et à l'importante notion de *travail*, qu'il est indispensable d'approfondir avant d'aborder la Dynamique. Il donne, dans le cas le plus général, la définition et l'expression analytique du travail d'une force appliquée à un point, en insistant sur le cas important où il y a *fonction de forces*. Les exemples proposés sont ceux du champ de la pesanteur et des forces centrales fonctions de la distance. Vient ensuite la notion de travail de l'*ensemble* des forces appliquées à un système, et la notion de *puissance* correspondant à la rapidité plus ou moins grande avec laquelle un travail est effectué.

Un important Chapitre traite de la *Dynamique du point*. Les trois équations générales du mouvement sont déduites du « Principe d'inertie », et sont suivies des équations « intrinsèques ». Ces équations fondamentales se traduisent immédiatement par le

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, année 1915, p. 115-121.

Principe de d'Alembert. Le théorème de la *quantité de mouvement* et celui du *moment de la quantité de mouvement* sont donnés dès le début : il suffira de les généraliser dans l'étude de la Dynamique des systèmes. C'est à propos de ces théorèmes que l'Auteur traite le cas des percussions et chocs, où la vitesse du point varie brusquement.

Suit le théorème de la force vive, pour un point, et quelques exercices.

Après ces généralités, M. Cotton traite quelques problèmes concrets. Le mouvement rectiligne lui fournit plusieurs applications : chute libre, avec ou sans résistance milieu, force fonction de l'abscisse, attraction proportionnelle à la distance, avec frottement, résistance de milieu, et force perturbatrice périodique. Le mouvement curviligne est l'objet d'autres exemples : cas de la trajectoire imposée (pendule simple), ou du point libre (projectile dans le vide, ou dans l'air avec résistance proportionnelle à la vitesse).

Le Chapitre de la Dynamique du point se termine par l'étude sommaire du pendule sphérique, et par celle du mouvement des planètes (attraction newtonienne) : ce beau problème, que l'étudiant n'a pas le droit d'ignorer est susceptible d'être étudié par des méthodes élémentaires très simples et fournit, relativement aux théorèmes généraux, les applications les plus instructives et les plus intéressantes.

L'Auteur arrive à la *Dynamique des systèmes.* Un Chapitre spécial est consacré aux deux théorèmes généraux des quantités de mouvement projetées et des moments cinétiques, qui offrent l'avantage précieux d'éliminer les forces intérieures, et qui suffisent parfois, à eux seuls, à donner d'utiles renseignements sur le mouvement des systèmes. Les applications de ces deux théorèmes sont choisies toujours de la manière la plus judicieuse et la plus instructive, et empruntées aux exemples les plus familiers. Signalons encore qu'à propos de ces deux théorèmes, l'Auteur étudie, comme il l'a fait dans le cas du point matériel, les percussions et chocs.

Le cas, si important en pratique, d'un solide mobile autour d'un axe fixe, est traité avec détails : on donne le calcul des réactions exercées par les coussinets fixes sur les tourillons, ainsi que l'indication des propriétés des axes « spontanés » de rotation.

L'interprétation cinématique du théorème des moments cinétiques en fait comprendre le sens très précis au point de vue géométrique. M. Cotton en tire l'explication élémentaire très claire du si curieux effet *gyroscopique*. Il termine le Chapitre par les équations de mouvement d'un solide autour d'un point fixe (équations d'Euler), ou d'un solide libre.

Le Principe général des *forces vives*, pour les systèmes matériels, fait l'objet d'un Chapitre particulier. Dans ce théorème, les forces intérieures ne disparaissent pas, en général. L'étude du travail des forces (tant extérieures qu'intérieures) amène tout naturellement au *Principe des travaux virtuels* (ou des vitesses virtuelles), à la définition des déplacements compatibles avec les liaisons, aux systèmes « sans frottement ». Suivent plusieurs exemples, toujours choisis de la façon la plus heureuse, d'applications du Principe des vitesses virtuelles à quelques appareils simples (treuils, balances, etc.).

Le Principe des vitesses virtuelles, lorsqu'on impose au système son déplacement *réel*, redonne le théorème des forces vives, dont l'Auteur indique quelques applications : petits mouvements d'un système à liaisons complètes autour d'une position d'équilibre stable, théorie sommaire des volants.

Le dernier Chapitre du Volume a trait à l'étude des *Mouvements relatifs*, qui nécessite l'introduction de la force centrifuge et de la force centrifuge composée. Le principal exemple choisi est celui des régulateurs à force centrifuge. Comme autre exemple, l'Auteur cite l'intérêt de rapporter le mouvement d'un organe appartenant à une machine mobile, non pas au sol, mais au bâti de la machine (cadre de la bicyclette, fuselage de l'aéroplane, etc.), et fait remarquer à ce propos le fait important que le travail de la force centrifuge composée disparaît toujours dans l'application du théorème des forces vives au mouvement relatif.

Le Chapitre se termine par l'étude sommaire de quelques conséquences dynamiques du mouvement de la Terre.

Tel est le résumé de ce *Cours de Mécanique générale*. Les professeurs y trouveront avec satisfaction des exemples concrets toujours intéressants, pour illustrer les théories. Les élèves en apprécieront la réelle clarté d'exposition. H. VERGNE.

MÉLANGES

SUR DES PROPRIÉTÉS RELATIVES A DES TORSIONS DE COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES;

PAR M. S. MANGEOT.

Le mode de construction que j'ai décrit, dans une précédente Note à l'Académie des Sciences [1], du rayon de torsion T et du centre Γ de la sphère osculatrice en un point O d'une courbe C, définie comme l'intersection de deux surfaces S, S', tombe en défaut si la tangente OA à cette courbe est une tangente asymptotique de l'une des deux surfaces, S. Dans ce cas, la solution de la question peut être obtenue par une méthode que je vais exposer.

Une courbe quelconque d'une surface S qui touche l'une de ses deux tangentes asymptotiques OA, en un point O, et dont le rayon de courbure R en ce point est fini, a son plan osculateur confondu avec le plan tangent de S au point O, et sa torsion γ est égale au triple de la somme ou de la différence des deux quantités $\frac{1}{l}$, 2RL, où l et L sont deux constantes [2], qui ont les significations suivantes :

La première, l, est une longueur susceptible de ces trois interprétations géométriques : 1° elle est égale à la moyenne géométrique λ des longueurs des rayons de courbure principaux de S en O; 2° elle est la demi-longueur d'axe de l'un comme de l'autre des deux hyperboloïdes de révolution engendrés par la rotation de OA autour des axes des deux cercles de courbure principaux de S en O; 3° elle est encore le rapport, à la tangente de l'angle des deux tangentes asymptotiques, du diamètre du cercle osculateur de la section normale en O de S qui est perpendiculaire

---

(1) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 973.

(2) C'est la différence, ou la somme, qui convient, suivant que le rayon de courbure a, ou n'a pas, la même direction que celui de la ligne asymptotique de S tangente à OA.

sur OA. Quant à la constante L, elle est l'inverse du carré du paramètre de longueur de la parabole cubique osculatrice, au point O, de la section normale de S dont le plan contient OA : c'est ainsi le rapport constant de MP à $\overline{OP}^3$, où P désigne la projection, sur OA, d'un point quelconque M de cette cubique.

Cela étant, que l'on prenne la section, tangente en O à OA, de la surface S′ par le plan qui touche S au point O, et que l'on construise son cercle osculateur en ce point ainsi que le diamètre OI, issu de O, de sa conique (ou parabole) osculatrice, en O. Soit g l'intersection de la normale en O à S′ avec l'axe de ce cercle, qui est aussi le cercle de courbure de C. On doit avoir $3T = \Gamma g \times \operatorname{tang}\theta$ ($\theta = \mathrm{IOA}$) (¹). Lorsqu'on a $L \neq 0$, la somme et la différence des deux quantités désignées ci-dessus, où l'on prend R égal au rayon de ce cercle, font connaître par leurs distances au point g quatre points de son axe dont l'un est le point Γ, et l'on peut savoir lequel (²).

Je suis amené, incidemment, à formuler ce théorème : Les deux lignes asymptotiques d'une surface issues de l'un de ses points ont leurs rayons de courbure en ce point proportionnels aux carrés des paramètres des deux paraboles cubiques qui osculent en ce point les sections normales de la surface tangentes aux deux lignes, le coefficient de proportionnalité étant $\frac{1}{3l}$.

Les deux branches de la section de la surface par le plan tangent en ce point auraient aussi leurs courbures connues par ce théorème.

Je me place, actuellement, dans l'hypothèse où l'on aurait $L = 0$. Ceci revient à supposer que la tangente OA rencontre S en plus de trois points coïncidant en O. Ici, le rayon de torsion T est égal à $\frac{1}{3}l$ pour toute courbe C de S tangente à OA, au point O (³).

(¹) *Loc. cit.* Car le rayon de courbure en un point m d'une conique dont la normale en m a pour pôle p est égal au produit de la longueur mp par la cotangente de l'angle que fait la tangente mp avec le diamètre passant en m.

(²) Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, Γ coïncide avec g : l'ambiguïté n'est pas levée par ce procédé en ce qui concerne T.

(³) On excepte la ligne asymptotique.

Il est à remarquer que la construction du rayon de torsion et de la sphère

Le cas où la droite OA serait tout entière sur S fournit alors cette propriété, $3T = l$, de toutes les courbes C d'une surface S qui touchent une droite supposée lui appartenir, le point de contact étant un point quelconque O de cette droite. Je vais en indiquer des conséquences et des applications (¹).

J'envisage la section C de S par un cylindre parabolique S′ touchant la droite en O, perpendiculaire au plan tangent de S en O, et dont la base dans ce plan ait son axe incliné de $\theta = \frac{\pi}{4}$ sur la droite. On a, au point O de cette courbe C, $3T = \Gamma g = \lambda$, ce qui conduit à cette proposition. Quand une surface S est réglée, que l'on construise, dans son plan tangent en un point O de l'une de ses génératrices, D, un carré quelconque $OO_1O_2O_3$ ayant un sommet en O et son sommet opposé, O_2, sur D, puis, que l'on élève, sur le plan, une perpendiculaire O′H au point O′, qui est le symétrique de O par rapport à l'un, O_1, des deux autres sommets : si u est un point d'une génératrice infiniment voisine de D dont la projection sur le plan est à la même distance de O_1 et de la droite O_2O_3, et si v est le point de O′H qui est également éloigné des deux points O, u, la distance O′v est une longueur qui a pour limite λ (²).

Une courbe de l'hyperboloïde à une nappe tangente à l'une de ses génératrices, a son rayon de torsion au point O du contact

---

osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données d'une manière quelconque est réductible à celle de deux cercles et de une ou de deux paraboles (dont l'une peut être cubique), situés dans des plans connus et ayant un contact d'osculation en ce point avec l'une ou l'autre surface. Il y a exception dans le cas où la tangente à la courbe serait une tangente asymptotique de chacune des deux surfaces. Ici, le plan osculateur est indéterminé et il n'y a pas lieu de se poser la question.

(¹) Voici des résultats qui découlent immédiatement de cette propriété :

Lorsque deux surfaces sont telles qu'une des tangentes de l'une est située sur l'autre, si l'on fait tourner l'une ou l'autre d'un angle quelconque autour de cette droite, leur intersection conserve la même torsion au point du contact après la rotation.

Quand deux surfaces ont un contact d'ordre > 1 en un point d'une droite qui leur est commune, toute courbe de l'une et toute courbe de l'autre qui touchent la droite en ce point y ont la même torsion.

(²) En envisageant aussi l'intersection de cette même génératrice avec le plan normal en O à D, on voit que l'on a là un moyen simple de construire approximativement les longueurs des rayons de courbure principaux d'une surface réglée en chacun de ses points.

représenté par l'expression $\frac{abc}{3\delta^2}$, où a, b, c sont ses demi-axes et δ la distance de son centre à son plan tangent en O : de sorte que, si Δ et Δ' sont les deux diamètres de la surface parallèles à ses génératrices issues de O, le rayon de torsion de la courbe en O n'est autre, aussi, que le rapport de $2\,dd'$ à $3\,\delta \sin(\Delta, \Delta')$, d et d' désignant les distances des deux droites Δ, Δ' au point où leur plan est rencontré par une génératrice quelconque de l'hyperboloïde.

J'envisage une courbe gauche définie d'une manière quelconque. Elle jouit de la propriété suivante : en chaque point de la courbe, le rayon de torsion et la distance, au plan osculateur, du centre de la sphère osculatrice sont dans un rapport égal au tiers de la tangente de l'angle que fait la tangente à la courbe en ce point avec le diamètre conjugué de sa direction dans la conique (ou parabole) osculatrice, en ce point, de la projection de la courbe sur ce plan. Si l'on connaît le plan et la sphère qui osculent la courbe en un point O, on connaîtra donc son rayon de torsion par cette propriété. Dans tous les cas, on peut parvenir à sa connaissance par l'application de cette autre propriété : la torsion en un point d'une ligne donnée et la mesure de la courbure totale, relative à ce point, d'une surface non développable menée par la ligne et par sa tangente en ce point sont deux nombres dont le second, indépendant de la surface, a pour valeur absolue la neuvième partie du carré du premier. Enfin, on peut aussi, pour le même objet, appliquer les règles qui viennent d'être indiquées en prenant pour l'hyperboloïde une quadrique passant par la courbe et sa tangente en O, s'il en existe, comme c'est le cas pour la cubique gauche, pour l'ellipse sphérique [1], ou une quadrique

---

[1] En partant de là, on est conduit à formuler cette règle particulière :

O étant un point donné d'une cubique gauche et OO′ sa tangente en ce point, que l'on prenne, à volonté, trois autres points α, β, γ de la courbe et une droite K la rencontrant deux fois; que l'on mène les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ s'appuyant sur K et OO′, les trois droites $\alpha\alpha''$, $\beta\beta''$, $\gamma\gamma''$ dont chacune rencontre l'une et l'autre de celles-ci, et la droite OO″ qui coupe deux quelconques de ces trois dernières; puis, que l'on construise les trois droites d'intersection du plan O′OO″ avec les plans $\alpha'\alpha\alpha''$, $\beta'\beta\beta''$, $\gamma'\gamma\gamma''$, et le point de rencontre des trois plans menés respectivement par ces trois droites et par les milieux des segments $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$; enfin, que l'on tire, de ce point, les deux parallèles Δ, Δ' à OO′ et OO″, et que

qui ait un contact de second ordre en O avec une surface menée par la courbe et cette tangente, laquelle sera située aussi sur cette quadrique [1].

---

l'on prenne l'intersection ϖ de leur plan avec K. Le rayon de torsion de la cubique en O sera le rapport de $2dd'$ à $3\delta \sin(\Delta, \Delta')$ si d, d' et δ sont les distances de ϖ aux deux droites Δ, Δ' et celle de O à leur plan.

Pour construire le rayon de torsion d'une ligne de courbure d'une quadrique à centre en un point O où la tangente est OO', il suffit de prendre trois cordes de la courbe appartenant à trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, qui rencontrent OO', et de mener une droite OO'' qui coupe deux droites quelconques s'appuyant sur ces trois dernières; puis de tracer, par le centre de la quadrique, deux parallèles Δ, Δ' à OO' et OO'', et de construire le point ϖ où leur plan rencontre l'une ou l'autre des trois mêmes droites. Le rayon est alors donné par le même rapport que le précédent, les lettres qui y figurent étant définies dans les mêmes termes.

Dans l'un comme dans l'autre cas, l'hyperboloïde S que déterminent les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ contient la courbe tout entière et sa tangente en O. Le plan de ses deux génératrices OO', OO'' est le plan osculateur de la courbe en O. En déterminant pareillement, par trois de ses droites, un hyperboloïde S' contenant la courbe et une autre quelconque de ses tangentes, la section de ce plan dans S', qui est déterminée par quatre points et la tangente OO' à l'un d'eux, pourrait faire connaître le centre I' de la sphère osculatrice de la courbe en O au moyen de la formule écrite plus haut ($\theta = \mathrm{IOO'}$), puisque son rayon de torsion T est connu, et cela sans ambiguïté si l'on faisait usage de deux de ces hyperboloïdes S'.

[1] Si $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ sont des équations développées suivant les puissances entières de x, y, z, de la courbe donnée rapportée à trois axes Ox, Oy, Oz, dont le dernier est sa tangente, l'équation

$$z^{-2}[f(x, y, z)\varphi(0, 0, z) - \varphi(x, y, z)f(0, 0, z)] = 0$$

définit une telle surface et, limitée à ses termes de degrés inférieurs à 3, elle représente un tel hyperboloïde, lorsque Oz n'est pas une tangente asymptotique de chacune des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$. Le plan tangent de l'hyperboloïde à l'origine O donnerait le plan osculateur de la courbe.

Parmi toutes les quadriques qui touchent au second ordre une surface quelconque en un point, il en est deux qui sont de révolution autour d'un axe parallèle à son plan tangent en ce point. Elles y ont entre elles un contact de troisième ordre. Leurs équateurs sont les cercles principaux de la surface en ce point. Elles ont la même longueur d'axe et celle-ci est égale au double de la constante λ de la surface en ce point. Si la surface est une de celles qui passent par une courbe donnée et par sa tangente en un point, celui-ci étant le point envisagé, cette longueur d'axe représentera six fois le rayon de torsion de la courbe en ce point.

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ ET SES APPLICATIONS A L'ASTRONOMIE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. On parle beaucoup aujourd'hui de la relativité, et le grand public, qui ne se préoccupe guère habituellement des théories physiques, s'est intéressé à cette doctrine en raison surtout des propositions d'allure paradoxale qu'on y rencontre. Il y a vu principalement une modification dans les idées fondamentales de l'humanité relatives à l'espace et au temps. Cependant les questions philosophiques que soulèvent la nature du temps et celle de l'espace ne datent pas d'hier. Pour Aristote « Le temps est le nombre relatif au mouvement, lorsque l'on considère celui-ci comme présentant une partie qui précède et une partie qui suit », ce que, dans son histoire des doctrines cosmogoniques, Duhem paraphrase sous la forme suivante : Le temps est ce qui permet d'énumérer les états pris par une chose en mouvement en les rangeant dans l'ordre de succession. Ainsi, pour le Stagyrite, les notions de temps et de mouvement sont indissolublement liées; il dit d'ailleurs explicitement : « Nous mesurons le mouvement à l'aide du temps et le temps à l'aide du mouvement ».

2. Une question se pose de suite : le temps n'est-il qu'une idée conçue par notre esprit, ou bien a-t-il une réalité indépendante de cet esprit ? Pour Aristote, la seconde alternative est à adopter. Il admet que, dans des choses réellement existantes, il y a un caractère indépendant de toute intelligence capable de compter; c'est ce qu'il appelle le nombre *nombrable* (ἀριθμούμενος) à distinguer du nombre *compté* ou *nombré* (ἀριθμητός). Mais une difficulté très sérieuse se présente, et qui a posé dans ces temps lointains un problème de relativité. Puisque tout mouvement peut nous donner la notion du temps, la considération de mouvements différents ne nous donnera-t-elle pas des temps différents ? Aristote répond par la négative. Il croit pouvoir établir que, quel que soit le mouvement, on aboutira toujours à définir le même temps, mais sa

démonstration ne fut pas, semble-t-il, unanimement admise. Il ne faut pas d'ailleurs oublier que pour les péripatéticiens les substances vouées à la génération et à la corruption sont seules soumises au temps, les êtres qui durent toujours n'étant pas dans le temps; ce que reprendra plus tard la doctrine catholique en distinguant le *temps* et l'*éternité*.

3. Les néoplatoniciens distinguaient deux temps. Suivant eux, il y a en dehors du temps physique un autre temps, le temps primordial qui est la cause du premier; au sujet du temps physique, certains parlaient du temps de la lune, de celui du soleil et des planètes. On croirait presque entendre les relativistes modernes parler du temps local.

Les discussions commencées dans l'antiquité sur la nature du temps n'ont jamais cessé durant le moyen âge et les temps modernes, et les philosophes disserteront sans doute toujours sur son essence. On sait que pour Kant le temps et l'espace sont des formes *a priori* de notre sensibilité, formes à travers lesquelles nous voyons nécessairement les choses, et cette opinion s'est trouvée ruinée, au moins en ce qui concerne l'espace, par l'étude des géométries non euclidiennes. Plus récemment, une distinction essentielle a été faite par M. Bergson entre la durée réelle c'est-à-dire la durée vécue que la conscience perçoit, et le temps paramètre qui figure dans nos formules.

4. En présence d'opinions si diverses sur le temps, on est tenté de dire avec saint Augustin : « Qu'est-ce donc que le temps? Si nul ne me le demande, je le sais; si je cherche à l'expliquer quand on me le demande, je ne le sais pas. » Ne pouvant définir le temps, il faut se borner à le nombrer, pour parler comme les péripatéticiens, c'est-à-dire à le mesurer. C'est donc reprendre le problème des temps différents, un instant soulevé dans l'antiquité. Ce préambule philosophique n'aura peut-être pas été inutile, car, il y a, je crois, intérêt à rappeler que certaines difficultés ne datent pas d'hier.

Ceci dit, je voudrais essayer de tracer une esquisse de la théorie moderne de la relativité, en vue d'indiquer les applications à l'astronomie. Je le ferai en narrateur impartial, si j'ose dire,

n'ayant pas encore une opinion sur la place que l'avenir réservera à l'édifice si séduisant par certains côtés construit par Einstein, et me demandant si c'est un progrès que de chercher à ramener la physique à la géométrie, mais plein d'admiration pour l'effort accompli dans cette audacieuse tentative.

La théorie de la relativité est très abstraite, et c'est, à mon sens, une entreprise vaine que de vouloir l'exposer avec quelque précision sans employer les symboles mathématiques. Comme on l'a dit, il y a des cas où il est plus facile d'apprendre les mathématiques que de s'en passer. J'ai cherché seulement à indiquer ici les idées essentielles, sans entrer dans le détail de calculs souvent très longs; d'ailleurs la première théorie de la relativité (relativité restreinte d'Einstein) n'exige que les éléments des mathématiques.

I.

3. Dans la vie courante, l'homme n'éprouve pas la moindre difficulté en ce qui concerne l'espace et le temps. Il croit avoir une conception très nette d'un espace absolu à travers lequel se meuvent les corps. Cet espace est celui sur lequel raisonnent les géomètres. Quant au temps, il s'écoule d'une manière régulière et continue, entièrement indépendant de l'espace et indifférent aux phénomènes physiques. A la vérité, pour qui réfléchit quelque peu, la définition de l'unité de temps n'est pas sans présenter de sérieuses difficultés, exigeant divers postulats sur l'égalité de durées de deux phénomènes regardés comme identiques; la difficulté est atténuée toutefois par le fait expérimental que plusieurs phénomènes de nature différente peuvent concourir d'une manière concordante à l'idée d'égalité de deux temps.

C'est en partant de l'espace et du temps absolus, que s'est peu à peu édifiée la physique moderne. D'après les principes mêmes qui sont à la base de notre Dynamique, aucune expérience mécanique, à laquelle sont étrangers les corps extérieurs, effectuée dans un système animé par rapport à l'espace absolu d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, ne permet à un observateur entraîné avec ce système de mettre le mouvement de celui-ci en évidence; c'est un principe de relativité. On peut aussi, au lieu de considérer le mouvement par rapport à l'espace absolu, envi-

sager le mouvement d'un système par rapport à un autre, par exemple le mouvement de translation de la Terre par rapport au Soleil; aucune difficulté n'est apparue, tant qu'il ne s'est agi que de phénomènes mécaniques.

6. Dès le temps d'Arago et de Fresnel, la même question se posa pour les phénomènes lumineux. Il résulta de leurs expériences, et de celles des physiciens qui les ont suivis, que les lois de la réfraction et de la réflexion de la lumière ne se ressentent en rien du mouvement de translation de la Terre; mais aucune contradiction n'apparut encore à ce sujet, avec les théories admises. Il n'en fut pas de même d'une expérience, aujourd'hui célèbre, imaginée en 1887 par le physicien américain Michelson, et trop souvent décrite pour que nous y revenions.

Si l'on admet que la loi habituelle de composition des vitesses de la cinématique s'applique aux phénomènes lumineux, une contradiction apparaît avec le résultat de l'expérience de Michelson, un déplacement de franges d'interférence prévu par la théorie classique ne se produisant pas. C'est en analysant cette expérience qu'Einstein fut conduit, en 1905, dans son premier Mémoire sur la relativité, à formuler l'hypothèse suivante : *la vitesse de la lumière, pour un observateur placé dans un système animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, est une constante universelle c, indépendante de l'état de mouvement du système.* Avec ce postulat se trouvait expliqué le fait que l'expérience de Michelson ne décelait pas le mouvement de la Terre par rapport à l'éther, regardé comme immobile, et l'on pouvait poser le principe de la relativité pour les phénomènes lumineux dans les mêmes conditions que pour les phénomènes mécaniques.

A la vérité, certains doutes ont été émis sur l'interprétation de l'expérience de Michelson, le calcul fait à ce sujet prêtant à quelques objections; mais ces doutes ne paraissent pas partagés par la majorité des physiciens, et nous admettrons le principe d'Einstein de la constance de la vitesse de la lumière, d'où va se tirer toute la théorie de la relativité restreinte [1].

---

[1] Un point est encore à noter. Dans les théories classiques relatives à l'éther les équations sont réduites à la forme linéaire. Qu'adviendrait-il, dans les pro-

II.

7. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de préciser plusieurs points. Nous avons parlé de temps et de longueur. Cela n'a de sens que si les observateurs placés sur différents systèmes savent mesurer ces grandeurs. Nous avons, par hypothèse, un système invariable S animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à un système σ; ce sera, par exemple, une droite glissant d'un mouvement uniforme sur une autre.

8. Soit envisagé S; tout d'abord, quand dirons-nous qu'un point M de S est à égale distance de deux points A et B de ce même système? Ce sera quand, des miroirs ayant été placés en ces derniers points, un signal lumineux émis en M reviendra en ce point au même instant après réflexions en A et B. Il résulte de là qu'un observateur de S peut faire des graduations dans ce système, sans déplacer des règles.

9. Une autre notion essentielle est ensuite celle de la simultanéité (dans le système S) de deux événements se passant en A et B. Ces événements seront simultanés si des signaux lumineux, partant respectivement de A et B à l'instant où ces événements se produisent, arrivent *simultanément* au milieu M de AB. Le réglage des horloges résulte évidemment de là : deux horloges identiques du système S placées en A et B marcheront d'accord si elles marquent la même heure, quand deux événements se produisent simultanément en A et B. On peut encore dire, relativement à ce réglage, que si un signal, partant de A au temps *zéro*, y revient au temps θ après réflexion en B, l'horloge en ce dernier point devra marquer $\frac{\theta}{2}$ quand arrivera le signal lancé par A. Il reste, pour l'observateur entraîné avec S, à faire choix d'une unité de longueur; il prendra pour cette unité une longueur relative à un phénomène physique produit dans le système, par exemple la longueur d'onde

---

blèmes qui nous occupent, si l'on ne se limitait pas à cette approximation ? C'est une question à laquelle il n'est pas possible, actuellement, de répondre. On ne peut donc pas dire que l'on a épuisé toutes les alternatives.

d'une radiation déterminée, émise par une source rattachée au système, et pour unité de temps la période correspondant à cette onde. On voit le rôle essentiel joué par les signaux lumineux dans les mesures de l'espace et du temps.

10. Ainsi donc, il y a pour le système S des unités déterminées et un temps *local*. Il en est de même pour le système σ. Mais comment pourrons-nous comparer les longueurs et les temps de S et de σ? Il ne peut être question de transport d'appareils de mesure d'un système à l'autre, ce qui, sans parler des impossibilités, pourrait donner lieu à des altérations dont on ne peut rien dire *a priori*.

Cette comparaison va être faite en invoquant le principe d'Einstein de la vitesse constante c de la lumière, et en tenant compte de la réciprocité des deux systèmes.

Soient Ox la ligne des abscisses dans le système σ, et ΩX la ligne des abscisses dans S; ces droites glissent l'une sur l'autre. L'origine Ω des coordonnées dans S a une vitesse v sur Ox. Un point quelconque M a respectivement les coordonnées x et X par rapport aux deux systèmes; t et T sont respectivement les temps correspondant à ceux-ci. On veut chercher les expressions de x et t en fonction de X et T, en supposant, comme il est permis par un choix convenable des origines, que x et t s'annulent pour $X = T = 0$.

Si le couple (x, t) correspond à une onde lumineuse, sa vitesse $\frac{dx}{dt}$ étant égale à c, on aura

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0;$$

mais, d'après l'hypothèse d'Einstein, cette équation devra entraîner

$$dX^2 - c^2 dT^2 = 0.$$

Une de ces équations entraîne donc l'autre. Les premiers membres de ces équations ne diffèrent donc que par un facteur, et la réciprocité [1] des deux systèmes exige que ce facteur soit égal à

[1] Cette réciprocité s'exprime en écrivant que la longueur, dans le système σ, d'une longueur *un* immobile par rapport à S est égale à la longueur, dans le système S, d'une longueur *un* immobile par rapport à σ.

l'unité. On a donc

$$(1) \qquad c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dT^2 - dX^2,$$

ce qui détermine les expressions cherchées, en ajoutant la condition que la vitesse de Ω par rapport à O est égale à v. On trouve ainsi

$$(2) \qquad x = \frac{X + vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{T + \frac{vX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

d'où se déduit de suite

$$(3) \qquad X = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad T = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

équations auxquelles on adjoindra $y = Y$, $z = Z$, ces deux coordonnées n'ayant pas changé puisque S a, par rapport à σ, une translation dans le sens de l'axe des x.

Si le sens de la translation uniforme avait été quelconque, on aurait eu une transformation plus générale, se rattachant à l'invariance (4), qui généralise (1) :

$$(4) \qquad c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2,$$

et le groupe correspondant porte le nom de *Lorentz*, qui l'a le premier envisagé.

11. Tirons diverses conséquences des équations (2) et (3). Soit une longueur M_1M_2 sur S, les abscisses des extrémités M_1 et M_2 sur ΩX étant X_1 et X_2. A *un même temps* t, M_1 et M_2 occupent sur σ les positions m_1 et m_2 correspondant aux abscisses x_1 et x_2 sur Ox. On a, d'après la première des équations (3),

$$X_2 - X_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

c'est-à-dire que

$$\overline{m_1 m_2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \overline{M_1 M_2}.$$

Par suite, pour l'observateur sur σ, la longueur $\overline{M_1 M_2}$ est réduite, et cela d'autant plus que v est plus grand.

Supposons encore qu'un phénomène se passe en $\Omega(X = 0)$, et dure un temps T pour l'observateur sur S. L'observateur sur σ lui attribuera la durée plus longue

$$t = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

comme il résulte de la seconde des équations (2). Le temps avance donc moins vite pour l'observateur fixe que pour l'observateur mobile. Un homme en mouvement vieillit par suite plus lentement, du moins à l'estime d'un homme au repos.

12. En différentiant les formules (2), et en divisant, on voit que la loi de composition de deux vitesses u et v est donnée par la formule $\left(\text{on pose } \frac{dX}{dT} = u\right)$

$$\frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

La cinématique de la relativité est donc différente de la cinématique classique, pour laquelle la loi de composition est $u + v$; les lois ne coïncident que pour $c = \infty$.

Divers phénomènes sont bien d'accord avec le résultat précédent. Citons seulement ce qui concerne la vitesse de la lumière dans un liquide en mouvement. Soit u la vitesse du liquide, $\frac{c}{n}$ la vitesse de la lumière dans le liquide en repos (n étant l'indice de réfraction). La vitesse résultante est, d'après la formule précédente, non pas $u + \frac{c}{n}$, mais

$$\frac{u + \frac{c}{n}}{1 + \frac{uc}{n}},$$

c'est-à-dire approximativement $\frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; le second terme correspond au transport partiel de l'onde lumineuse proposé par

Fresnel, et ce résultat est d'accord avec une expérience célèbre de Fizeau faite en 1851.

13. D'après la théorie de la relativité restreinte, il n'y a pas pour les phénomènes d'échelle absolue de mesure, indépendante des systèmes dans lesquels ils sont observés. En outre, le temps et l'espace jouent des rôles analogues, sinon identiques, dans les équations. Il n'y a donc pas, dans la doctrine de la relativité, d'un côté un espace (x, y, z) et un temps t, mais un continuum (x, y, z, t) à *quatre* dimensions. Les phénomènes se passent dans ce continuum que Minkowski appelle l'*Univers*. Cette idée a été exprimée par ce géomètre dans une conférence faite en 1908, trois ans après l'apparition du premier Mémoire d'Einstein, sous la forme suivante : « Dès maintenant l'espace indépendant du temps et le temps indépendant de l'espace ne sont plus que des ombres vaines; une sorte d'union des deux doit seule subsister encore. »

Un événement est représenté par un point de l'Univers, et il décrit dans ses modifications *une ligne d'Univers*. L'expression

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ne change pas quand on effectue sur x, y, z, t les transformations du groupe de Lorentz, et l'intégrale

$$\int_A ds$$

prise sur une ligne d'Univers entre les événements correspondant à ses extrémités A et B est appelée l'*intervalle entre ces événements*. Guidé par des analogies avec la théorie des lignes géodésiques des surfaces et l'ordre d'idées se rattachant au principe de la moindre action, on pose qu'un mobile *libre* décrit une géodésique de l'Univers de Minkowski, et que par suite, pour la trajectoire de ce mobile, la variation de l'intervalle entre deux événements est égale à zéro, ce qui s'exprime par

$$\delta \int_A^B ds = 0,$$

δ étant le symbole ordinaire du calcul des variations.

Un calcul facile montre que ces trajectoires sont des lignes droites parcourues uniformément. Les rayons lumineux sont des géodésiques de longueur nulle ($ds = 0$).

III.

14. Einstein a été peu à peu conduit à une extension considérable de sa première théorie. Reprenons le ds^2 envisagé plus haut

$$(5) \qquad ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Si, au lieu des coordonnées x, y, z, t, nous faisons usage de *coordonnées généralisées* x_1, x_2, x_3, x_4, de telle sorte que x, y, z, t soient des fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4, ds^2 deviendra une expression de la forme

$$(6) \qquad ds^2 = \Sigma\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (g_{ik} = g_{ki})(i, k = 1, 2, 3, 4).$$

les g étant des fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4 : on peut, *par exemple*, supposer que x_1, x_2, x_3 sont des coordonnées curvilignes dans l'espace ordinaire et x_4 une coordonnée relative à une horloge chargée seulement de définir l'ordre de succession des événements autour du point (x_1, x_2, x_3). A l'Univers envisagé se trouve ainsi attachée une certaine forme (6).

Prenons maintenant la question en sens inverse, et donnons-nous arbitrairement *dix* fonctions g_{ik} de x_1, x_2, x_3, x_4 et, par suite, la forme quadratique (6) de différentielles. Un problème se pose d'abord : peut-on de (6) remonter à (5) en prenant pour les x_i des fonctions convenables de x, y, z, t? La réponse est négative : la chose n'est possible que si les g satisfont à *vingt* relations renfermant les g et leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre. Si ces conditions sont remplies, on dit que l'Univers correspondant à (6) est *euclidien* [1]; il en est ainsi, en particulier, quand les g sont des constantes.

---

[1] Avec plus de précision, une forme telle que (6) est dite *euclidienne* quand elle est susceptible d'être ramenée à la forme

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2,$$

les X étant des fonctions des x, la transformation étant complexe aussi bien que

Supposons-nous maintenant dans le cas général, où l'Univers donné par (6) n'est pas euclidien. Nous considérons alors en un *point* déterminé, d'ailleurs quelconque, de cet Univers un Univers euclidien *qui lui soit tangent*. Voici ce qu'on entend par là. *Le point étant donné*, la forme quadratique (6) est une forme quadratique des dx_i à coefficients constants. On peut alors choisir dx, dy, dz, dt fonctions linéaires et homogènes de dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, de telle sorte que (5) se transforme en (6). Notre Univers initial a été ainsi transformé en un Univers euclidien, mais seulement *dans le voisinage du point envisagé;* cet Univers euclidien est *l'Univers tangent en ce point*.

Dans les univers euclidiens tangents aux divers points, supposons, pour fixer les idées, que les observateurs prennent pour unité de longueur une certaine longueur d'onde lumineuse et une unité de temps telle qu'elle donne à la vitesse de la lumière une valeur c. Dans ces conditions, une correspondance se trouve établie de proche en proche entre les observations faites dans notre Univers et celle des observateurs des Univers euclidiens tangents. C'est là un point fondamental, mais l'application de cette idée générale n'est pas sans présenter quelques difficultés, comme on le verra plus loin sur un cas particulier.

15. On pose en principe que toute loi physique doit être exprimée par des équations gardant la même forme, quand on substitue aux coordonnées généralisées des fonctions quelconques de celles-ci, *ce qui constitue sous sa forme générale le principe de relativité*. Il en est bien ainsi pour les équations du mouvement d'un point *libre;* elles sont obtenues en écrivant que la variation de l'intervalle entre deux événements A et B est nulle, c'est-à-dire

$$\delta \int_A^B ds = 0,$$

et elles gardent manifestement la même forme invariante par rap-

---

réelle; ceci correspond à ce que Riemann appelait *espace plan*. Si l'on reste dans le domaine réel, certains carrés pourront être précédés du signe *moins;* c'est ce qui arrive pour la forme (5), et il peut arriver alors que toute les variables ne jouent pas le même rôle, tel le *temps* dans cette dernière forme. Aussi faut-il parler d'analogie et non d'identité entre l'espace et le temps.

port au ds transformé. Les trajectoires correspondantes sont dites les *géodésiques* correspondant au ds.

La physique d'un Univers dépend donc de son ds. C'est ce qui a fait dire que *la physique se trouve ramenée à la géométrie*.

IV.

16. Dans un Univers euclidien, on dit qu'il n'y a pas de champ *permanent* de gravitation. Donc dans un Univers, où il y a un champ gravitationnel, les g ne satisfont pas aux vingt équations dont nous avons parlé plus haut. D'autre part, s'il y a, pour un Univers, des relations entre les g et leurs dérivées partielles le caractérisant, les idées d'invariance imposées par le principe de relativité exigent que l'ensemble de ces relations ait une forme invariante quand on fait un changement quelconque de coordonnées. C'est le grand mérite d'Einstein d'avoir su trouver un système de relations entre les g, moins limitatif que les *vingt* équations relatives à l'espace euclidien, et capables, suivant lui, de caractériser un espace *gravitationnel*.

Nous ne pouvons songer ici à indiquer les diverses hypothèses et les laborieux calculs qui ont conduit à ces relations, se présentant en nombre d'abord égal à *dix*, mais réductible à *six*. Disons seulement qu'Einstein a pris pour point de départ l'hypothèse qu'une transformation convenable de coordonnées est équivalente, *dans le voisinage d'un point*, à une force de gravitation; c'est là l'idée directrice qui permet de ne plus parler de force et, en fait, dans cette *géométrisation* de la physique, *l'attraction n'est plus une force, mais une propriété de l'espace*.

Les propriétés de la matière se rattachent à cette géométrie à quatre dimensions par des généralisations de l'équation classique de Poisson dans la théorie du potentiel newtonien.

Je n'ai pas cru devoir dans l'exposition qui précède parler de courbure dans l'espace à quatre dimensions. Il n'y a là qu'un langage plus ou moins commode, car nous n'avons pas l'intuition d'un tel espace. Peut-être même a-t-il conduit parfois à des assertions en opposition avec la pure doctrine de la relativité. Ainsi on peut lire chez certains auteurs que la présence de la matière produit

une courbure de l'espace, tandis qu'il est plus conforme aux idées de *géométrisation* de dire que l'existence de la matière est une conséquence de certaines déformations. Je n'ai rien dit non plus de la masse, notion qui ne joue pas de rôle direct dans les applications faites ici à l'astronomie; ce qui la concerne doit, pour être présenté dans toute son ampleur, être rattaché aux formules compliquées de la relativité générale.

17. Les seuls contrôles expérimentaux auxquels a été soumise jusqu'ici en astronomie la théorie de la relativité se rapportent à un champ ponctuel de gravitation provenant d'un point que nous supposerons placé à l'origine. La recherche du ds correspondant renferme beaucoup d'indétermination. Le problème peut être précisé au moyen de diverses hypothèses simplificatrices. Dans la forme la plus usitée, on appelle t la quatrième variable x_4, et x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées polaires r, θ, ψ de l'espace habituel. On a alors

$$ds^2 = \gamma c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\gamma} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\psi^2, \tag{8}$$

où $\gamma = 1 - \frac{2m}{r}$; m est une constante introduite dans le courant du calcul.

Le mouvement d'un point *libre* dans l'espace (8) se détermine facilement. L'orbite est approximativement une ellipse, dont l'origine est un foyer. Mais le grand axe de cette ellipse n'est pas fixe, comme dans le cas newtonien du problème des deux corps. Il tourne à chaque tour d'un angle sensiblement égal à

$$\frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \tag{9}$$

a, T, e désignant respectivement le grand axe, le temps de la révolution et l'excentricité; de là se déduit la rotation *séculaire*.

18. Une application de la formule donnant la rotation séculaire a eu un grand retentissement; c'est celle qui concerne le mouvement du périhélie de la planète Mercure. On sait que, dans la mécanique céleste classique, le mouvement de Mercure est approximativement aussi un mouvement elliptique avec rotation du grand axe, mais cette rotation tient à l'action des autres planètes, parti-

culièrement de Vénus. Or la théorie des perturbations donne seulement pour le périhélie une avance de 532″ par siècle, tandis que l'observation donne une avance de 574″. Il y a donc un résidu d'environ 42″, mais il me semble que ce nombre ne soit pas déterminé avec une grande précision. Malgré des tentatives variées (changement de l'exposant dans la loi de Newton, aplatissement du Soleil, planète intramercurielle, lumière zodiacale, loi électrodynamique, etc.), on n'a pas réussi à expliquer d'une manière satisfaisante ce résidu [1].

Einstein s'est demandé ce que donnerait la théorie nouvelle appliquée à Mercure, en ce qui regarde l'action solaire, rien n'étant changé d'ailleurs dans l'action des planètes. Or il est remarquable que, en introduisant dans la formule (9) les nombres relatifs à Mercure [2], on trouve 42″,9 : *c'est la différence cherchée.* On pourrait presque dire que ce résultat est trop satisfaisant, tant d'influences incomplètement analysées jusqu'ici devant s'exercer dans le voisinage du Soleil, si toutefois on considère le nombre de 42″ comme correspondant réellement aux observations.

Pour les autres planètes, sauf peut-être Mars, la rotation du périhélie est très mal déterminée, à cause de la petitesse de l'excentricité, car la quantité mesurée est le produit de la rotation par l'excentricité; il n'y a donc pas lieu de leur appliquer la théorie précédente. Quant à Mars, il y a entre l'observation et la théorie classique un résidu de 4″, susceptible peut-être de s'expliquer par l'attraction des astéroïdes circulant entre Mars et Jupiter. Quoi qu'il en soit, si l'on applique la formule (9), on trouve pour la

---

(1) Tout récemment (*Comptes rendus*, 29 août 1921), M. Gaston Bertrand a fait l'intéressante remarque qu'une infinité de lois d'attraction, dépendant à la fois de la distance et de la vitesse, conduisaient à la formule (9), et rendaient compte par suite du résidu relatif à Mercure. Telle est en particulier la loi

$$f\frac{mm'}{r^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3}$$

ne différant de la loi de Newton que par le dernier facteur dépendant de la vitesse v. Cette loi et celles visées plus haut ont évidemment un caractère artificiel, et ne se rattachent pas, comme il arrive pour l'application faite par Einstein, à une théorie générale conçue sans souci du cas particulier à expliquer.

(2) L'unité de longueur étant le kilomètre et l'unité de temps le trois-cent-millième de seconde.

rotation du grand axe de Mars pendant un siècle le nombre $1'',35$; le résidu non expliqué de $4''$ serait donc diminué de ce nombre.

19. Un second problème relatif à l'espace gravitationnel (8) appelle l'attention. Quelle est la trajectoire d'un rayon lumineux? Il faut chercher, comme nous l'avons dit, les géodésiques de longueur nulle. Le rayon lumineux est approximativement hyperbolique. Si la distance du sommet de cette courbe au centre de gravitation est R, on a pour l'angle α des asymptotes

$$\alpha = \frac{4m}{R}$$

et *cet angle est sensiblement l'angle de déviation des rayons lumineux*. Ceci trouve son application dans le cas d'un rayon lumineux venant d'une étoile et rasant le bord du Soleil. Il est naturel d'admettre que le sommet est à la surface du Soleil; R étant alors le rayon solaire et m étant égal à $4\pi^2 \frac{a^3}{c^2 T^2}$ (a et T correspondent à la terre), la valeur de α est égale à $1'',75$. Le rayon lumineux est donc dévié de cet angle.

Les étoiles ne pouvant être observées près du Soleil, il faut chercher à profiter d'une éclipse totale de cet astre pour observer cette déviation. C'est ce qui a été fait avec succès dans l'expédition organisée par l'éminent astronome anglais M. Eddington pour observer l'éclipse de Soleil du 29 mai 1919. L'accord avec la théorie semble s'être montré satisfaisant, mais il est à souhaiter qu'une éclipse prochaine confirme ces mesures délicates. On doit désirer aussi que l'action de la matière sur la lumière puisse être mise en évidence dans des conditions plus facilement observables.

20. Une dernière application de la théorie de la relativité à l'astronomie concerne le déplacement vers le rouge des raies du spectre solaire par rapport à celles des sources terrestres, sous l'action du champ de gravitation provenant du Soleil. Les considérations faisant prévoir ce déplacement peuvent être présentées de la manière suivante :

Plaçons-nous en un point donné (r, θ, ψ, t) de l'Univers correspondant à (8). D'après ce que nous avons dit (§ 14), on doit iden-

tifier (3) avec le carré

$$c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

de l'espace euclidien, où T désignera le temps dans l'Univers euclidien tangent. On obtient ainsi immédiatement

$$dT = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Considérons alors un atome vibrant placé au point considéré. Si t_0 et T_0 sont les deux durées des vibrations correspondant respectivement à un point de (8) à la distance r_0 du Soleil et à l'Univers tangent, on aura

$$T_0 = \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} t_0.$$

Or on admet, ce qui peut être contesté (c'est à cette difficulté que nous faisions allusions à la fin du paragraphe 14), que T_0 est fixe; ceci revient à supposer qu'il y a chute libre dans l'Univers tangent. Par suite, pour deux points situés à des distances r_0 et r'_0, on a, entre les temps t_0 et t'_0, la relation

$$\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} t_0 = \left(1 - \frac{2m}{r'_0}\right)^{\frac{1}{2}} t'_0.$$

Si le second point est sur la terre, on peut regarder r'_0 comme infini, et en se bornant à la première puissance de r_0, on peut écrire pour un point sur le Soleil

$$t_0 = \left(1 + \frac{m}{r_0}\right) t'_0,$$

où r_0 représente le rayon solaire.

La durée de la vibration t_0 pour l'observateur sur le Soleil est donc plus grande que la durée t'_0 pour l'observateur sur la terre. *Il doit donc y avoir une déviation vers le rouge.* En passant aux nombres, on a

$$t_0 = t'_0\, 1{,}0000021.$$

On attachait une grande importance à la vérification expérimentale de ce résultat, sans doute parce qu'il paraît tenir à des pro-

priétés intimes de la matière. Mais cette vérification était difficile, car au déplacement prévu par Einstein peut s'ajouter un déplacement des raies par la pression, sur l'importance duquel on n'est pas fixé. Toutefois, M. Perot croit avoir établi que pour certaines raies du magnésium l'effet de pression est négligeable, et que l'écart entre les raies du spectre solaire et celles de l'arc sous faible pression a la valeur prévue par la théorie d'Einstein. D'autre part MM. Fabry et Buisson, en examinant d'anciennes mesures faites par eux à une époque où l'on ne soupçonnait pas l'influence de la gravitation, ont constaté que leurs résultats étaient en concordance parfaite avec la théorie de la relativité. Pour les raies du fer qu'ils ont examinées, comme pour celles du magnésium étudiées par M. Perot, la pression de la couche renversante serait négligeable, et l'effet Einstein serait seul en cause. Mais il est sans doute prudent d'apporter quelque réserve dans cette affirmation.

V.

21. Telles sont les applications faites jusqu'ici à l'astronomie des vues d'Einstein sur la gravitation. Elles se rapportent toutes les trois, on doit le remarquer, à des phénomènes se passant sur le Soleil ou à une distance relativement faible de cet astre. Pour que la physique s'engage définitivement dans la voie ouverte par la théorie de la relativité, il faudra probablement que de nombreuses expériences, d'un caractère positif, aient été effectuées dans les laboratoires. Une expérience se rattachant aux questions qui nous occupent, fut faite, il y a une dizaine d'années, par M. Sagnac. Elle présente quelque analogie avec celle de Michelson, et se passe dans un système auquel on donne un mouvement de rotation, mais elle se rapporte aux éléments du premier ordre. Dans cette expérience, on observe un déplacement de franges d'interférence qui met en évidence la rotation. Il est d'ailleurs possible d'expliquer la belle expérience de M. Sagnac au moyen de la théorie générale de la relativité, comme au moyen des théories classiques.

Terminons par quelques remarques générales. Certains trouvent qu'il y a dans l'établissement de la théorie de la relativité einsteinienne des points obscurs et des hypothèses insuffisamment for-

mulées, et cela est exact. Mais cette critique touche peu ceux qui pensent qu'une théorie ne doit pas avoir la prétention de donner des apparences une explication conforme à la réalité, et que seuls importent les formules finales et leur accord aussi exact que possible avec un ensemble de lois expérimentales, le but essentiel étant de *sauver les phénomènes*, σώζειν τὰ φαινόμενα, suivant une expression qui remonte à Platon, et la partie essentielle d'une théorie étant surtout le moule analytique dans lequel elle enferme les choses. A ce point de vue, on peut dire que ce qui constitue une théorie de la relativité, c'est le ds^2 qui lui correspond. Celui-ci obtenu, on peut faire abstraction de la manière dont on y a été conduit.

D'autres, attachés aux idées traditionnelles, ne prennent pas facilement leur parti d'une sorte de rupture avec le sens commun. L'avenir dira dans quelle mesure, si de nouveaux faits expérimentaux leur apportent un appui, les idées nouvelles pourront s'incorporer dans ce bon sens moyen de l'humanité, où Descartes mettait le fondement de la certitude, et qui était pour lui le trait d'union entre notre pensée et le réel. Sans cet accord, il n'y a que scepticisme; c'est un écueil que n'ont pas toujours évité les théoriciens de la physique.

ÉMILE PICARD.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLV.

TABLES ALPHABÉTIQUES

DU

TOME XLV, 2e SÉRIE (LVIe DE LA COLLECTION) : 1921

PREMIÈRE PARTIE.

1° TABLE DES OUVRAGES ANALYSÉS, PAR NOMS DES AUTEURS.

(Le nom du rédacteur de l'analyse est indiqué en italique.)

Pages.

ADHÉMAR (Robert D'). — Résistance des matériaux (*Jean Villey*) 217

APPELL (P.). — Traité de mécanique rationnelle. Tome IV : Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses particules (*R. Thiry*) 281

BERZOLARI (L.). — Geometria analitica. T. I, 2e éd. (*Joseph Pérès*).. 12

BOUSSINESQ (J.). — Cours de physique mathématique de la Faculté des Sciences (*Marcel Brillouin*) 298

BUHL (A.). — Géométrie et analyse des intégrales doubles (*Georges Giraud*) 153

BUREAU DES LONGITUDES. — Annuaire pour l'an 1921 (*Ernest Lebon*).. 294

COTTON (Émile). — Cours de mécanique générale. Introduction à l'étude de la mécanique industrielle (*H. Vergne*) 347

DRZEWIECKI (Stéphane). — Théorie générale de l'hélice (*H. Villat*).. 121

GIRAUD (Georges). — Leçons sur les fonctions automorphes (*Pierre Boutroux*) 186

GOURSAT (E.). — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre (*G. Cerf*) 313

GLOBA-MIKHAILENKO (B.). — Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation (thèse) (*P. Appell*) 10

HATTON (J. L. S.). — The theory of the Imaginary in Geometry (*E. Cahen*) 13

HILTON (Harold). — Plane algebraic curves (*Robert d'Adhémar*)... 185

HUYGENS (Christiaan). — Œuvres, tome XIV (*Pierre Boutroux*).... 218

JEANS (J. H.). — Problems of cosmogony and stellar dynamics (*René Garnier*) 249

LEVEUGLE (R.). — Précis de calcul géométrique (*A. Buhl*) 57

MITTAG-LEFFLER. — Institut Mathématique (*La Rédaction*) 89

MORDELL (L. J.).—Three lectures on Fermat's last theorem (*E. Cahen*). 284

Pages.

OCAGNE (M. D'). — Principes usuels de Nomographie (*P. Appell*).... 7
OPPERMANN (A.). — Premiers éléments d'une théorie du quadrilatère complet (*Joseph Pérès*)..... 60
RIGNANO (E.). — Psychologie du raisonnement (*Gino Loria*)..... 61
ROY (Louis). — Statique graphique et résistance des matériaux (*H. Vergne*)..... 315
SILBERSTEIN (L.). — Éléments d'algèbre vectorielle et d'analyse vectorielle (*Adolphe Buhl*)..... 345
STIELJES (Thomas Jan). — Œuvres complètes, publiées par les soins de la Société mathématique d'Amsterdam. Tome II (*Émile Picard*). 5
VIVANTI (Giulio). — Lezioni di analisi infinitesimale. *Parte prima* (*J. Pérès*)..... 25
— Lezioni di analisi infinitesimale; fasciculo secondo (*Joseph Pérès*). 90
WITEHEAD (A. N.). — An enquiry concerning the principles of natural knowledge (*Pierre Boutroux*)..... 28

2° TABLE DES AUTEURS D'ANALYSES.

ADHÉMAR (Robert D'). 185.
APPELL (Paul). 7, 10.
BOUTROUX (Pierre). 28, 186, 218.
BRILLOUIN (Marcel). 298.
BUHL (Adolphe). 57, 345.
CAHEN (E.). 13, 284.
CERF (G.), 313.
GARNIER (René). 249.
GIRAUD (Georges). 153.
LEBON (Ernest). 294.
LORIA (Gino). 61.
PÉRÈS (Joseph). 12, 25, 60, 90.
PICARD (Émile). 5.
THIRY (R.). 281.
VERGNE (H.). 315, 347.
VILLAT (H.). 121.
VILLEY (Jean). 217.
La Rédaction. 89.

3° TABLE DES MÉLANGES, PAR NOMS D'AUTEURS.

AURIC. — Sur un perfectionnement à apporter aux statistiques..... 135
BERTRAND DE FONTVIOLANT. — Sur le théorème de Menabrea..... 305
CHAZY (Jean). — Sur les courbes définies par les équations différentielles de second ordre..... 271
DELASSUS (Et.). — Sur le principe fondamental de la Mécanique analytique..... 231
FATOU (P.). — Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière..... 65
FLAMANT (Paul). — Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires en nombre infini..... 81
FONTENÉ (G.). — Sur la dynamique de la relativité..... 309, 120
FRÉCHET (Maurice). — Remarques sur les probabilités continues..... 87
GAMBIER (Bertrand). — Applicabilité des surfaces réelles. Étude spéciale de la correspondance entre point réel et point imaginaire. Systèmes cycliques réels et systèmes triples orthogonaux correspondants..... 137, 156, 189

Pages.

GODEAUX (L. L.). — Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert 14

JANET (Maurice). — Sur la recherche générale des fonctions primitives à n variables 238

JANS (C. DE). — Sur une généralisation du problème de Barlow 41

LIÉNARD (M.). — Sur le théorème de Menabrea 20

MANGEOT (S.). — Sur des propriétés relatives à des torsions de courbes tracées sur les surfaces 350

OGURA (K.). — Sur la théorie de l'interpolation de Stirling et les zéros des fonctions entières 31

PICARD (Émile). — Discours d'ouverture de la sixième Conférence générale des Poids et Mesures, prononcé le 27 septembre 1921, au Ministère des Affaires étrangères, en présence de M. le Ministre du Commerce 340

— La théorie de la relativité et ses applications à l'astronomie 355

RINDI (Scipione). — Sur la valeur moyenne 307

SMIRNOFF (V.). — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre et la théorie des fonctions automorphes 93, 126

VALIRON (Georges). — Sur les fonctions entières d'ordre fini 258

WAARD (C. DE). — Une lettre inédite de Roberval du 6 janvier 1637, contenant le premier énoncé de la cycloïde 206, 220

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE 24

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLV.

64182 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SECONDE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. Émile PICARD, *Président*.

P. APPELL.

E. BOREL.

J. HADAMARD.

E. GOURSAT.

M. BRILLOUIN.

D. TOMBECK, *Secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, quai Conti, n° 25, Paris, VIe.

64182-21 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, V. VOLTERRA, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.
PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XLV. — ANNÉE 1921.
(LVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1921

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome 169, 2e semestre, 1919 (1).

Kogbetliantz (*E.*). — Sur la sommation des séries ultrasphériques (54-57).

La sommabilité (C, δ) de la série

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int\int_{S}\frac{F(\theta',\varphi')\,P_n^{\lambda}(\cos\omega)}{[\sin^2\theta'\sin^2(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}-\lambda}}\,d\sigma,$$

en un point M de la sphère S, dépend de l'ordre γ d'infinitude de $F(\theta, \varphi)$ au point diamétralement opposé à M, mais seulement lorsque $\delta < 2\lambda$. L'auteur montre, d'une manière plus précise, que la série n'est pas sommable (C, $\lambda < \delta \leqq \gamma - 1$); elle est sommable (C, $\delta < 2\lambda$) pour $\delta > \gamma - 1$; elle l'est aussi (C, $\delta > \lambda$) si $\gamma \leqq \lambda + 1$. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient ainsi un résultat intéressant la série de Laplace de la fonction $F(\theta, \varphi)$.

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 2e partie, 1920, p. 39.

Boussinesq (*J.*). — Existence d'une relation approchée, signalée par M. Carvallo dans le quartz, entre les deux pouvoirs rotatoire (ordinaire) et dispersif des corps (109-114).

En se bornant aux termes du second ordre, l'auteur démontre une relation trouvée expérimentalement par M. Carvallo : le pouvoir rotatoire est égal à $k^2(N^2 - \text{const.})$, pour les radiations simples à période $\frac{2\pi}{k}$ et d'indice de éfraction N.

Giraud (*G.*). — Sur la classification des substitutions de certains groupes automorphes à n variables, et sur les relations algébriques qui existent entre $(n+1)$ fonctions quelconques correspondant à certains de ces groupes (131-134).

L'auteur considère les groupes automorphes à n variables, isomorphes aux groupes des substitutions semblables d'hermitiens tels que

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2,$$

ou bien avec deux carrés négatifs; il indique une classification des formes canoniques relatives aux substitutions fondamentales et en déduit que, sous certaines conditions, $(n+1)$ fonctions automorphes de ces groupes sont liées par une relation algébrique.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur les polynomes d'Euler (166-168).

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, n nombres quelconques, et posons

$$2\nabla_\omega F(x) = F(x+\omega) + F(x),$$
$$\nabla^n_{\omega_1,\ldots,\omega_n} F(x) = \nabla_{\omega_n}\left[\nabla^{n-1}_{\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}} F(x)\right].$$

Il y a alors un seul polynome, qui est de degré ν, satisfaisant à l'équation

$$\nabla^n_{\omega_1,\ldots,\omega_n} F(x) = x^\nu;$$

on l'appellera *polynome d'Euler* d'ordre n et de degré ν. Ces polynomes satisfont à de remarquables relations de récurrence; leurs coefficients généralisent les nombres d'Euler.

Plâtrier (*Ch.*). — Sur l'équilibre élastique d'un corps de révolution homogène isotrope soumis à des forces rayonnantes, soit proportionnelles, soit inversement proportionnelles au rayon (169-171).

En supposant les forces extérieures dirigées suivant les rayons des parallèles et les tensions nulles sur la surface extérieure du corps, l'auteur établit les conditions pour que les tensions T et N_3 (notations classiques) soient identi-

quement nulles : cela arrive, en particulier, dans le cas où les forces sont proportionnelles à r ou à $\frac{1}{r}$; on retrouve en passant les résultats de M. Lecornu pour l'équilibre relatif d'un cylindre de révolution très plat.

Humbert (*G.*). — Sur la formation du domaine fondamental d'un groupe automorphe (205-211).

L'auteur montre, par des exemples, que la méthode théorique du rayonnement, par laquelle on établit l'existence du domaine, peut être rendue assez maniable pour être utilisée pratiquement, que le groupe admette ou non un cercle principal.

Denjoy (*A.*). — Sur l'intégration riemannienne (219-221).

En remplaçant, dans la définition de Riemann, le maximum et le minimum d'une fonction par le *maximum* et le *minimum d'épaisseur* dans le même intervalle, on obtient une définition de l'intégrale aussi générale que celle de M. Lebesgue et conduisant à la même valeur. L'auteur indique encore deux autres extensions possibles de la méthode de Riemann, fondées sur la notion de mesure, et dont l'une au moins s'applique à des fonctions non sommables.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur les polynomes d'Euler (221-223).

La définition, donnée par l'auteur dans sa Note précédente (*voir* plus haut), peut s'étendre au cas où l'*ordre* est négatif; l'auteur indique de nouvelles propriétés de ces polynomes : en particulier, chacun d'eux est la solution rationnelle d'une équation différentielle à coefficients constants.

Garnier (*R.*). — Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires (223-226).

L'auteur a déjà montré qu'une singularité irrégulière peut être considérée comme limite de plusieurs autres, régulières, tendant à se confondre; mais il avait supposé distinctes les racines d'une certaine équation caractéristique; il montre ici que cette restriction est inutile. Toutefois, s'il en est ainsi, il y a des intégrales canoniques et des invariants du groupe de monodromie de l'équation régulière qui disparaissent sans laisser de *trace*.

Kogbetliantz (*E.*). — Sur l'intégrale de M. Angelesco (226-228).

Généralisation d'une propriété relative à la continuité d'une intégrale considérée par M. Angelesco dans sa thèse.

Humbert (*G.*). — Sur les représentations propres d'un entier par les formes positives d'Hermite, dans un corps quadratique imaginaire (309-315).

L'auteur rappelle ce que l'on doit entendre par représentations ordinaires et étendues d'un entier m, d'un corps idéal I, par une forme positive d'Hermite,

et indique les relations entre les représentations appartenant à des idéaux équivalents. Cela posé, la recherche du nombre de représentations propres, appartenant à 1, de m par des formes d'Hermite d'un corps quadratique imaginaire, proprement primitives et de discriminant donné, se ramène à celle du nombre de solutions d'une certaine congruence; ce dernier problème se résout lui-même en une élégante formule.

Andoyer (*H.*). — Sur le développement d'une fonction très générale du rayon vecteur et de l'anomalie excentrique dans le mouvement elliptique (315-317).

L'auteur montre comment on peut déduire, d'une manière très simple, du théorème de Cauchy relatif au développement d'une fonction périodique quelconque de l'anomalie excentrique suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne, la formule donnée par Tisserand pour développer une fonction du rayon vecteur suivant les cosinus des multiples de l'anomalie moyenne et les puissances de l'excentricité.

Kogbetliantz (*E.*). — Sur les séries ultrasphériques (322-324).

Étude de la série qui fait l'objet de la première Note du même auteur (*voir* plus haut), lorsque $\lambda - 1 \leqq \delta < \lambda$. Dans ce cas, la sommabilité (C, δ) dépend de l'allure de la fonction $F(\theta, \varphi)$, non plus en un point particulier, mais sur toute la sphère.

Garnier (*R.*). — Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées (324-326).

Solution par l'analyse du problème suivant : « Déterminer tous les champs tels que la dérivée du vecteur dans une direction perpendiculaire à ce vecteur est perpendiculaire à la direction de la différentiation. »

Jouguet (*E.*). — Sur un problème d'hydraulique généralisée. Écoulement d'un mélange gazeux en combustion (326-328).

Étude théorique de la variation qui se produit dans le débit, pour un mélange gazeux s'écoulant sans perte de charge par un ajutage, lorsqu'on enflamme le gaz à la sortie.

Véronnet (*A.*). — Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation, variation du grand axe (328-331).

L'auteur discute les formules données par M. Appell (*Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1919), en introduisant comme paramètre le grand axe.

Humbert (*G.*). — Sur les représentations d'un entier par les formes positives d'Hermite dans un corps quadratique imaginaire (360-365).

L'auteur étend une formule de Dirichlet relative aux formes quadratiques

binaires positives en levant certaines restrictions imposées au discriminant; en appliquant le résultat ainsi obtenu à la formule donnée dans sa dernière Note (*voir* plus haut), il aboutit à une *formule fondamentale*, qui comprend comme cas particulier celle qu'a donnée M. Fatou pour le corps quadratique i.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur une équation aux différences finies (372-375).

Soient $\varphi(x)$ une fonction donnée, ω un nombre positif. La recherche de la solution générale $G(x)$ de l'équation $G(x+\omega)+G(x)=2\varphi(x)$ se ramène à celle d'une solution particulière; celle-ci sera évidemment représentée par la série $2\Sigma(-1)^n\varphi(x+n\omega)$, si cette série est convergente; l'auteur montre que, même lorsqu'elle diverge, on peut en déduire la solution fondamentale en utilisant la théorie des séries divergentes de M. Borel.

Lévy (*P.*). — Sur la notion de moyenne dans le domaine fonctionnel (375-377).

Si l'on remplace la fonction $x(t)$, définie et continue entre 0 et 1, par une fonction d'approximation prenant des valeurs constantes $x_1, \ldots, x_n$, dans les intervalles $\left(0, \frac{1}{n}\right), \ldots \left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$, toute fonctionnelle de $x(t)$ devient une fonction de $x_1, \ldots, x_n$, dont on sait former la valeur moyenne; la limite de celle-ci sera, par définition, la moyenne de la fonctionnelle dans le domaine considéré. Si la fonctionnelle est uniformément continue à la surface (ou à l'intérieur) d'une sphère, elle y est *presque partout* égale à sa moyenne; on en déduit de curieuses propriétés de la courbure des surfaces, des surfaces minima et d'importantes conséquences dans la théorie des fonctionnelles harmoniques.

Plâtvier (*Ch.*). — Sur les efforts intérieurs dans un corps homogène isotrope en équilibre élastique (378-380).

En écrivant les conditions d'intégrabilité des équations différentielles d'un tel corps, on obtient des relations entre les efforts intérieurs et les coefficients de Lamé dont la forme conduit à des propriétés remarquables des efforts et des déformations.

Humbert (*G.*). — Sur la mesure de l'ensemble des classes positives d'Hermite, de discriminant donné, dans un corps quadratique imaginaire (407-414).

L'expression de cette mesure se déduit, par un passage à la limite, de la formule fondamentale donnée par l'auteur dans sa Note précédente (*voir* plus haut); celui-ci en indique quelques applications à des corps remarquables et retrouve ainsi des propositions de Liouville et de MM. Klein et Fricke. Les méthodes développées dans les dernières Notes du même auteur paraissent également fécondes pour l'étude des formes d'Hermite plus générales; en particu-

hier, l'étude des représentations par la forme $xx_0 + yy_0 + zz_0$ conduit à une démonstration arithmétique du nombre de décompositions d'un nombre impair en une somme de six carrés.

Kogbetliantz (*E.*). — Nouvelles observations sur les séries ultrasphériques (423-426).

On peut considérer le développement ultrasphérique de $f(x)$ comme cas particulier des fonctions de deux variables étudiées par l'auteur dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut); on obtient ainsi divers résultats relatifs à la convergence des développements dans le cas des fonctions à variation bornée.

Humbert (*G.*). — Sur la mesure des classes d'Hermite, de discriminant donné, dans un corps quadratique imaginaire, et sur certains volumes non euclidiens (448-454).

Soit Θ le domaine fondamental du groupe modulaire du corps; en appliquant la formule de la mesure obtenue dans sa Note précédente (*voir* plus haut), l'auteur obtient, suivant les cas, le volume non euclidien de Θ dans le demi-espace de Poincaré ou du domaine de Picard.

Stuyvaert. — Élimination d'une inconnue entre trois équations algébriques (459-462).

Soient F, G, G′ trois polynomes de degrés respectifs $m \geqq n \geqq n'$, et trois polynomes auxiliaires P, Q, Q′ de degrés h, $m + h - n$, $m + h - n'$; on supposera $h \geqq n' - 1$; considérons l'identité $FP + GQ + G'Q' \equiv 0$, qui se traduit par $(m + h + 1)$ équations entre les coefficients des polynomes auxiliaires, et soit M la matrice des coefficients de ces équations; l'auteur démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que F, G, G′ aient un plus grand commun diviseur de degré α est que M soit de rang $m + h + 1 - \alpha$.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur la solution principale d'une certaine équation aux différences finies (462-465).

L'auteur indique plusieurs représentations par des séries de natures très diverses, pour la solution fondamentale de l'équation étudiée dans sa dernière Note (*voir* plus haut).

Goursat (*E.*). — Remarques sur un problème de géométrie vectorielle (493-495).

Le problème proposé par M. Guichard et résolu en partie par M. Axel Egnell et M. R. Garnier dans leurs dernières Notes (*voir* plus haut), se ramène, par une analyse très rapide et très simple, au suivant : *Trouver tous les complexes de droites pour lesquels le cône du complexe relatif à un point quelconque de l'espace est un plan.* Sous cette forme, la solution est immédiate : on obtient soit le complexe linéaire, soit le complexe des droites tangentes à une surface développable.

Foch (*A.*). — Au sujet de la période propre des conduites à caractéristique unique munies d'une poche d'air (502-505).

La poche d'air étant située à l'extrémité aval, le calcul se fait en partant des équations d'Alliévi et en introduisant deux hypothèses : l'une au sujet de la relation entre le volume et la pression dans la poche, l'autre conduisant à représenter la pression par les premiers termes d'une série de Fourier. La formule obtenue se vérifie expérimentalement; on y voit, en particulier, que les petites oscillations sont sinusoïdales.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur les polynomes de Bernoulli (521-524).

L'extension donnée par l'auteur aux polynomes d'Euler dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut) fournit, en faisant $\omega = 1$, une extension des polynomes de Bernoulli ; on trouve ici les principales propriétés de ces polynomes généralisés : relations récurrentes, équations différentielles satisfaites, etc.

Robinson (*L.-B.*). — Un système symétrique de polynomes (524-526).

L'auteur donne une méthode nouvelle pour obtenir les conditions sous lesquelles un polynome de degré au plus égal à 4 se décompose en deux facteurs dont l'un est linéaire; elle est susceptible d'applications importantes dans la réduction des systèmes différentiels aux formes canoniques.

Chazy (*J.*). — Sur les solutions du problème des trois corps où les trois corps forment un triangle isoscèle (526-529).

Ce problème, qui intervient en particulier dans l'étude des chocs du problème des trois corps, est susceptible, en général, en dehors des solutions connues de Lagrange (triangle équilatéral) et d'Euler (ligne droite), de trois autres solutions dans lesquelles le mouvement admet soit un axe de symétrie, soit un plan, soit un axe et un plan (mouvement plan).

Wolf (*J.*). — Sur les suites de fonctions holomorphes (566-569).

Soit une suite convergente de fonctions holomorphes dans un domaine D $f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$; l'auteur démontre que, pour que la fonction limite soit elle-même holomorphe, il faut et il suffit que la suite de fonctions

$$\psi_n(x, y, z) = \frac{(y-z)f_n(x) + (z-x)f_n(y) + (x-y)f_n(z)}{(x-z)(y-z)}$$

converge quasi uniformément dans tout ensemble E borné et fermé que l'on peut former en associant des valeurs x, y, z de D qui évitent les triples

$$(x = z, y \neq z) \qquad \text{et} \qquad (x \neq z, y = z).$$

On en déduit d'importantes conséquences, en particulier, pour la suite formée par les dérivées de la suite donnée.

Foch (*A.*). — Sur la période des conduites possédant une poche d'air (569-571).

L'auteur traite le même problème que dans sa Note précédente (*voir* plus haut), mais en supposant la poche placée en un point quelconque de la conduite et non plus à l'extrémité aval.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur une extension des polynomes de Bernoulli (608-610).

Après avoir indiqué quelques propriétés récurrentes et sommatoires de ces polynomes généralisés qu'il a définis dans ses récentes Notes (*voir* plus haut), l'auteur est conduit à généraliser la notion d'*ordre* du polynome, lequel peut être non seulement négatif mais quelconque.

Stoïlow. — Sur la représentation analytique des fonctions de plusieurs variables complexes (610-612).

On connaît la méthode de M. Mittag-Leffler pour former une fonction uniforme, connaissant ses points singuliers; l'auteur montre ici comment on peut généraliser cette méthode aux fonctions de deux variables, lorsque les multiplicités singulières données sont linéaires.

Cerf (*G.*). — Sur les transformations des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes (613-615).

Soit une équation $f = 0$; si l'on connaît une autre équation $F = 0$ ayant avec la précédente des intégrales communes, on peut en déduire une transformation de la première, qui sera plus ou moins simple suivant la nature de la solution du système des deux équations; l'auteur en indique quelques exemples; on peut ainsi, dans certains cas, obtenir une suite de transformées analogue à la suite de Laplace relative aux équations linéaires du second ordre.

Leblanc (*M.*). — Sur les rotations rapides (627-633).

Pour éviter les trop vives réactions d'un rotor sur ses appuis, on est parfois conduit à laisser une certaine flexibilité à son axe, mais il faut alors que sa flèche demeure toujours très petite; l'auteur étudie analytiquement la variation de cette flèche suivant la vitesse du rotor et en déduit les précautions à prendre dans la pratique pour éviter les vitesses critiques.

Boutroux (*P.*). — Sur une famille de fonctions multiformes, intégrales d'une équation différentielle du premier ordre (635-638).

L'intégrale de l'équation $zz' = 3mz + 2x^3 + bx + c$ est multiforme; ses diverses branches correspondent aux diverses valeurs d'un paramètre C; l'auteur

a montré (t. 168, 1919, p. 1150 et 1307) que l'étude des permutations de ces branches, autour du point $x = \infty$, se ramène à celle d'un groupe de substitutions $\psi(C)$; il étudie ici les coupures du plan de C qui rendent $\psi(C)$ holomorphe et diverses propriétés de cette fonction correspondant à des contours particuliers décrits par C.

Pétrovitch (M.). — Intégrales définies dont la partie décimale s'exprime à l'aide de nombres premiers (683-685).

L'auteur indique plusieurs exemples d'intégrales (simples et doubles) dont la valeur numérique a même partie décimale que $1 - \sum \frac{1}{n_i}$, les n_i représentant les nombres premiers d'un certain intervalle. Il en résulte, en particulier, les conditions sous lesquelles ces intégrales seront égales à un nombre entier.

Kolossoff (G.). — Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini (685-687).

En supposant qu'il n'y a pas de forces accélératrices, le problème se ramène à l'intégration d'un système de six équations différentielles dont on connaît les trois intégrales algébriques de Kirchhoff; l'auteur en indique une quatrième, ce qui ramène le problème aux quadratures. Les cas d'intégrabilité connus jusqu'à présent (Stekloff, Liapounoff) se retrouvent naturellement comme cas particuliers.

Châtelet (A.). — Sur les nombres hypercomplexes à multiplication associative et commutative (708-711).

Divers auteurs ont rencontré récemment, dans leurs travaux, les systèmes de nombres $X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, où les e_i sont des symboles vérifiant une loi de multiplication $e_p e_q = \Sigma u_i^{(p,q)} e_i$; l'auteur en entreprend une étude générale en supposant que les x sont, non plus des nombres ordinaires, mais des éléments d'un corps quelconque.

Bell (E.-T.). — Sur les représentations propres par quelques formes quadratiques de Liouville (711-712).

L'auteur donne une formule générale reliant le nombre total de représentations et celui des représentations propres, pour des formes quadratiques à 4 et 6 indéterminées; elle permet de retrouver les nombreuses formules de Liouville relatives à ces questions.

Bouligand (G.). — Sur les fonctions bornées et harmoniques dans un domaine infini, nulles sur sa frontière (763-766).

Soit D un domaine infini, d'un seul tenant, dont les diverses parties n'empiètent pas les unes sur les autres, et appelons φ sa frontière; soit $V(x, y, z)$

une fonction harmonique et bornée dans D ; l'auteur démontre, moyennant une hypothèse restrictive faite sur le domaine, que, si V est nulle sur φ, elle l'est en tout point de D.

Stoïlow (*S.*). — Sur une classification des ensembles de mesure nulle (766-768).

La méthode proposée pour comparer et classer ces ensembles repose sur la correspondance qu'il est facile d'établir entre les points d'un segment d'axe et ceux d'un carré, d'un cube, etc.

Kogbetliantz (*E.*). — Sur l'unicité des développements ultrasphériques (769-770).

Soit S une série ultrasphérique qui converge dans l'intervalle $(-1, +1)$ avec une somme égale à $f(x)$, sauf peut-être aux frontières et en un ensemble réductible de points intérieurs; l'auteur démontre que, moyennant certaines hypothèses sur $f(x)$, la série S est alors le développement ultrasphérique de $f(x)$; en particulier, si $f(x) = 0$, les coefficients de S sont nécessairement tous nuls.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur le calcul aux différences finies (770-773).

Soit l'équation $F(x+\omega) - F(x) = \omega\varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant connue; certaines solutions, dites *principales*, jouent un rôle fondamental dans la recherche de $F(x)$; cette solution sera

$$\int_0^\infty \varphi(z)\,dz - \omega \sum_0^\infty \varphi(x + n\omega)$$

si l'intégrale et la série convergent séparément; mais, même si elles divergent, il est remarquable qu'une même méthode de sommation appliquée à l'intégrale et à la série donne, pour la différence ci-dessus, une expression qui tend vers une limite dans des cas très étendus; cette limite est indépendante de la méthode de sommation choisie et définit la solution principale.

Carleman (*T.*). — Sur les équations intégrales (773-776).

L'auteur montre que le théorème fondamental de M. Fredholm est une conséquence directe d'un théorème de M. Hadamard relatif aux séries qui représentent une fonction méromorphe.

Hamy (*M.*). — Sur un cas de diffraction des images des astres circulaires (821-825).

Un astre circulaire étant observé au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente rectiligne de largeur a, l'auteur a calculé précédemment la valeur de

l'intensité lumineuse le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle à celui de la fente, dans une direction quelconque, mais en supposant a très petit; il reprend ici la question dans toute sa généralité.

Bompiani (*E.*). — Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes (840-843).

La notion de parallélisme dans les espaces courbes, donnée par M. Levi-Civita, permet à l'auteur de généraliser aux espaces courbes, à un nombre quelconque de dimensions, la définition et quelques propriétés des surfaces de translation, et par suite des surfaces minima.

Bouligand (*G.*). — Sur les solutions de l'équation $\Delta u = \lambda u$, analytiques et bornées dans un domaine infini, nulles sur sa frontière (893-894).

L'auteur généralise aux solutions de l'équation $\Delta u = \lambda u$ ($\lambda > 0$), le théorème qu'il a démontré pour les fonctions harmoniques dans sa dernière Note (*voir* plus haut).

Nörlund (*N.-E.*). — Sur le calcul aux différences finies (894-896).

L'auteur étudie diverses représentations analytiques de la *solution principale* qu'il a donnée à la fin de sa dernière Note (*voir* plus haut); il en indique, en particulier, une expression asymptotique et un développement en série trigonométrique.

Dulac (*H.*). — Sur les cycles limites (897-899).

Soit l'équation $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, où P et Q sont des polynomes; toute courbe intégrale (C) s'appellera *caractéristique* en général, *cycle* si elle est fermée.

Dans ses célèbres travaux sur la forme de ces courbes, Poincaré a laissé de côté le cas où (C) passe par un *col* ou un point singulier mobile; l'auteur a étudié ces cas, ce qui l'a conduit à des résultats très importants : les *cycles limites* sont en nombre fini; il existe des *cycles séparateurs* qui divisent le plan en un nombre fini de régions dans chacune desquelles il n'y a qu'un nombre fini de cycles, à moins que toutes les caractéristiques ne soient des cycles.

Mayer (*O.*). — Sur les surfaces réglées du quatrième ordre à deux droites doubles (899-901).

En choisissant convenablement le tétraèdre de référence, ces surfaces admettent une équation réduite très simple, d'où l'on déduit beaucoup de propriétés; l'auteur étudie spécialement celles de ces propriétés qui sont relatives aux quadriques inscrites.

Humbert (*P.*). — Sur le calcul approché des éléments des jacobiens critiques d'ordre élevé (902-903).

La résolution approchée de l'équation dont dépend ce calcul est très pénible; l'auteur montre qu'il est plus commode de lui substituer une méthode de récurrence permettant de trouver les éléments d'ordre n quand on connaît ceux d'ordre $(n-1)$.

Kogbetliantz (*E.*). — Sur l'unicité des développements ultrasphériques (950-953).

L'auteur étend quelques-uns des résultats obtenus dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut) au sujet des séries ultrasphériques convergentes, en particulier celui qui est relatif à l'unicité du développement d'une fonction, aux séries divergentes mais sommables (C, δ).

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Sur la classification des ensembles fermés situés sur une surface (953-954).

La classification proposée s'applique à toute surface d'ordre de connexion fini.

Bouligand (*G.*). — Sur le problème de Dirichlet pour un domaine infini (1020-1023).

Dans une Note récente (*voir* plus haut), l'auteur a démontré que la solution est unique pour un domaine D satisfaisant à des conditions très générales; il démontre ici son existence, lorsque la frontière de D admet en chaque point à distance finie un plan tangent variant continûment; pour cela, il considère D comme limite de domaines finis; les fonctions de Green de ceux-ci tendent vers une fonction limite qui peut, par ses propriétés, être considérée comme la fonction de Green du domaine D.

Valiron (*G.*). — Sur les ensembles réguliers de mesure nulle (1078-1081).

L'auteur démontre que les *points fondamentaux*, qui interviennent dans la notion introduite par M. Borel d'un ensemble linéaire régulier de mesure nulle, sont des points de condensation de l'ensemble; la démonstration met en évidence une relation entre la décroissance des intervalles correspondant à chaque point fondamental et la densité des points de l'ensemble; l'auteur en déduit une classification de ces ensembles qui se généralise aux ensembles à n dimensions.

Mesnager. — Solution élémentaire de la plaque rectangulaire encastrée, portant une charge uniformément répartie ou concentrée en son centre (1081-1083).

La méthode de l'auteur consiste essentiellement à décomposer le problème en

plusieurs autres, chacun de ceux-ci fournissant un déplacement élémentaire dont la somme constitue le déplacement vertical cherché; on obtient ainsi la solution sous forme d'une somme de trois séries trigonométriques dont la loi de formation des coefficients est connue.

Plancherel (*M.*). — Sur la méthode d'intégration de Ritz (1152-1155).

La méthode de Ritz peut s'étendre aux équations aux dérivées partielles, linéaires, du type elliptique, mais d'ordre quelconque et de forme assez générale. Elle fournit un moyen pratique pour obtenir, dans un domaine, les solutions définies par des conditions aux frontières. La démonstration n'est ici qu'esquissée sur l'équation particulière $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f$; elle est basée sur la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables.

Drach (*J.*). — Détermination des intégrales premières de l'équation différentielle des lignes géodésiques, rationnelles par rapport à la dérivée première de la fonction inconnue (1155-1158).

Dans une Note antérieure (t. 168, 1919, p. 497), l'auteur a exposé une méthode pour déterminer les cas où l'équation $y'' = f(x, y)$ admet une intégrale première rationnelle en y'; il montre ici que sa méthode s'applique aussi à l'équation des lignes géodésiques écrite en coordonnées symétriques

$$v'' = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}v' - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}v'^2.$$

Carlson (*F.*). — Sur une propriété des polynomes d'une variable (1388-1390).

Soient τ et δ arbitrairement petits; l'auteur démontre qu'il existe un polynome $P(x)$ vérifiant les conditions

$$P(0) = 1, \quad |P(e^{i\varphi})| < \tau \qquad \text{pour} \qquad -\pi + \delta \leqq \varphi \leqq \pi - \delta.$$

Il annonce, comme conséquence, que toute série de Taylor à coefficients entiers, et dont le rayon de convergence est l'unité, représente soit une fonction rationnelle de x, soit une fonction admettant le cercle de convergence comme coupure.

Mesnager. — Méthode de détermination des tensions existant dans un cylindre circulaire (1391-1393).

Après une critique des formules employées actuellement, qui ne tiennent compte que des tensions parallèles à l'axe du cylindre, l'auteur obtient, par une analyse plus exacte, des formules faisant intervenir les autres tensions; il indique en terminant le moyen de mesurer expérimentalement les quantités qui y figurent.

E. Gau.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

3e série, Tome XXXIII, 1916 [1].

Picard (*Émile*). — Sur les intégrales abéliennes de seconde espèce et sur leur périodicité (1-15).

M. Picard indique la manière très simple dont il a présenté, dans son Cours de 1915, la théorie des intégrales abéliennes de seconde espèce, et les problèmes relatifs à leur périodicité, sans recourir à la considération des surfaces de Riemann. Le Mémoire se termine par la remarque que, si l'on considère une courbe algébrique

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

dépendant rationnellement de α, et une intégrale de seconde espèce dépendant rationnellement de α, les $2p$ périodes de celles-ci, considérées comme fonctions de α, satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$, à coefficients rationnels.

Brillouin (*Léon*). — Sur une méthode de calcul approché de certaines intégrales, dite *méthode de col* (17-69).

Soit à étudier l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\, e^{iw(x)}\, dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction lentement variable dans le plan complexe, et développable, ainsi que $w(x)$, en série de Taylor. La méthode de col consiste à intégrer sur des lignes où la partie imaginaire de $w(x)$ est constante; quand ces lignes vont à l'infini, on s'arrange pour que la partie réelle de $w(x)$ tende vers $-\infty$. Le nom de la méthode vient d'une analogie avec les cartes géographiques, où les cols, c'est-à-dire les points où

$$\frac{dw}{dx} = 0,$$

jouent un rôle très important. M. Brillouin applique la méthode au calcul des intégrales

$$\int e^{ix^2}\, dx, \quad \int e^{i(x^3 - vx)}\, dx, \quad \int e^{i(x^4 + ux^2 - vx)}\, dx,$$

prises entre des limites finies ou infinies, qui se présentent dans la théorie de la diffraction. Il obtient des développements dont les uns convergent, et les autres sont seulement asymptotiques, mais se prêtant bien aux calculs numériques.

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 1920, 2e Partie, p. 57.

Delassus (*Ét.*). — Sur les mouvements holonomes dont les équations admettent des formes multiples de Lagrange (71-125).

M. Delassus recherche les mouvements pour lesquels il est possible de remplacer la force vive $2T$ et le travail virtuel $\mathfrak{T}$ par d'autres fonctions conduisant à un système de Lagrange équivalent; il écarte les fonctions qui conduisent à des équations de Lagrange équivalant chacune à une des équations du premier système de Lagrange, car on est conduit ainsi à des transformations applicables à n'importe quel mouvement. Par contre, il admet des fonctions donnant des systèmes qui soient seulement des conséquences du système donné, sans entraîner celui-ci : ce cas se rencontre, car l'auteur ne suppose pas que $2T_2$ soit une forme quadratique définie. L'auteur trouve, comme seuls mouvements à deux paramètres, ceux qui se ramènent aux équations du mouvement d'un point dans un plan. Il considère en outre des mouvements analogues à plus de deux paramètres, sans pouvoir affirmer qu'ils répondent seuls à la question.

Plusieurs cas d'intégration par quadratures sont ainsi découverts; les uns sont déjà connus, les autres sont nouveaux, par exemple, les lois de force centrale

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = F(\alpha x + \beta y),$$

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = F(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2),$$

où α, β, γ sont des constantes; ces dernières lois contiennent comme cas particuliers des lois indiquées par Darboux et Halphen.

Denjoy (*Arnaud*). — Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables (127-222).

Ce Tome ne contient que le début de ce Mémoire, qui est lui-même la suite de deux autres (*J. de Math. pures et appl.*, 1915; *Bull. de la Soc. math.*, 1915). L'auteur résout complètement le problème de déterminer une fonction primitive d'une fonction dont on sait qu'elle est une dérivée. Dans ce début de Mémoire, il introduit la notion, capitale pour son objet, de fonction *résoluble*, notion qui se rattache à celle de *variation d'une fonction sur un ensemble parfait*. Il démontre à ce sujet diverses propositions qui montrent l'importance des fonctions résolubles.

Montel (*P.*). — Sur les familles normales de fonctions analytiques (223-302).

Dans le premier Chapitre de ce Mémoire, qui en contient quatre, M. Montel rappelle les propriétés des familles normales, ce qui le conduit à redémontrer le théorème de M. Schottky, en appliquant à une famille de fonctions la méthode de M. Borel pour démontrer le théorème de M. Picard sur les fonctions entières. Dans le deuxième Chapitre, il étudie la distribution des zéros de $f(x) - a$ au voisinage d'une singularité essentielle isolée admettant une valeur exceptionnelle. Il étend le résultat à des ensembles parfaits discontinus de points singuliers, et étudie les propriétés des fonctions holomorphes qui ne

prennent pas deux valeurs données à l'intérieur d'un angle. Dans le Chapitre III, l'étude des familles normales de polynomes le conduit en particulier aux résultats de M. Hadamard sur les fonctions entières de genre fini. Dans le dernier Chapitre, l'étude des familles normales de fonctions méromorphes le conduit à de curieuses propositions, par exemple qu'il n'existe pas trois fonctions entières X, Y, Z telles que

$$X^m + Y^n + Z^p = 0$$

si la somme des inverses des entiers m, n, p est inférieure à un.

Giraud (*Georges*). — Sur les groupes des transformations semblables arithmétiques de certaines formes quadratiques quaternaires indéfinies, et sur les fonctions hyperabéliennes correspondantes (303-329).

L'auteur démontre que trois fonctions hyperabéliennes, invariantes par un même groupe semblable au groupe des substitutions semblables arithmétiques d'une forme quadratique quaternaire du type

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

à coefficients entiers, sont liées par une relation algébrique. Cette démonstration nécessite l'examen des points du polyèdre fondamental dont l'une des deux coordonnées complexes est réelle; on trouve que la nature de ces points dépend de la possibilité de représenter zéro par la forme quadratique donnée, comme on le savait depuis M. Picard, et en outre du fait que cette forme, égalée à zéro, représente une quadrique qui possède, ou non, des génératrices rectilignes rationnelles.

Giraud (*Georges*). — Sur les groupes des transformations semblables arithmétiques de certaines formes quadratiques quinaires indéfinies, et sur les fonctions de trois variables indépendantes invariantes par des groupes isomorphes aux précédents (331-362).

Après un paragraphe destiné à compléter son Mémoire du Tome précédent du même Recueil, l'auteur fait une étude analogue à celle du travail précédent pour les formes quadratiques quinaires du type

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2.$$

Les fonctions de trois variables qui s'en déduisent sont liées quatre à quatre par des relations algébriques.

Picard (*Émile*). — Sur certains groupes discontinus correspondant aux formes quadratiques ternaires (363-371).

M. Picard considère le groupe des transformations subies par les variables

$$u = x : z, \qquad v = y : z,$$

quand x, y, z subissent une substitution à coefficients entiers réels conservant la forme

$$x^2 + y^2 - z^2.$$

Il démontre que ce groupe est discontinu pour tout point non réel situé à distance finie, et pour tout point réel tel que

$$u^2 + v^2 < 1.$$

Il correspond à ce groupe des fonctions automorphes se comportant comme des fonctions rationnelles en dehors de la surface

$$(u_2 v_1 - u_1 v_2)^2 - (u_2^2 + v_2^2) = 0,$$

où l'on a posé

$$u = u_1 + i u_2, \qquad v = v_1 + i v_2.$$

En outre, ces fonctions se comportent de la même façon pour les points réels tels que

$$u^2 + v^2 < 1.$$

Picard (*Émile*). — Sur la nature algébrico-logarithmique des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques régulières (373-379).

M. Picard rappelle brièvement la démonstration de l'existence du nombre ρ, nombre des « courbes algébriques irréductibles particulières $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ », tracées sur la surface, « telles qu'il n'existe pas d'intégrales de différentielle totale de troisième espèce, ayant seulement pour courbes logarithmiques la totalité ou une partie de ces courbes C, mais telles qu'il existe une intégrale ayant seulement pour courbes logarithmiques une $(\rho + 1)^{\text{ième}}$ courbe algébrique irréductible quelconque Γ de la surface, et la totalité ou une partie des courbes C ». De l'analyse même qui l'a conduit à la notion du nombre ρ, il déduit le théorème de M. Severi que, *pour une surface algébrique régulière, toute intégrale de différentielle totale est une expression algébrico-logarithmique.*

Gronwall (*F.-H.*). — Sur les zéros des fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ associées à la fonction gamma (381-393).

L'auteur considère les fonctions

$$P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(z+m)}, \qquad Q(z) = \int_1^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx,$$

dont la somme est la fonction gamma. En prenant d'abord la somme des premiers termes de la série $P(z)$ jusqu'à une valeur impaire de m, puis en passant à la limite, il redémontre que $P(z)$ a un zéro réel et un seul dans chacun des intervalles

$$\left(-2m-1, -2m-\frac{3}{2}\right), \left(-2m-\frac{3}{2}, -2m-2\right) \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots),$$

résultat déjà établi par M. Haskins; et, en outre, il prouve que $P(z)$ a exac-

tement quatre zéros complexes, résultat énoncé, avec une démonstration insuffisante, par Bourguet. En terminant, il donne pour l'existence d'une infinité de zéros de $Q(z)$ deux démonstrations très courtes, surtout la seconde.

GEORGES GIRAUD.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS.

Vol. XLI (1910) [1].

Hardy (*G.-H.*). — The maximum modulus of an integral function [Le module maximum d'une fonction entière] (1-9).

Soit $f(z)$ une fonction entière. On suppose que z décrive le cercle de centre O et de rayon r, et l'on marque sur ce cercle le ou les points où $|f(z)|$ a sa plus grande valeur. Puis on considère le lieu de ces points formé de courbes que l'on appelle *courbes maximum*. On appelle *valeurs exceptionnelles* de r de *première espèce* les valeurs r_0 pour lesquelles les courbes maximum sont analytiquement différentes pour $r < r_0$ et $r > r_0$, mais passent par les mêmes points du cercle $r = r_0$. On appelle *valeurs exceptionnelles* de r de *seconde espèce*, les valeurs r_0 pour lesquelles cette seconde condition n'est pas réalisée. M. Blumenthal avait donné des exemples de valeurs exceptionnelles de première espèce, M. Hardy donne des exemples de valeurs exceptionnelles de seconde espèce. Il prend pour cela $f(z) = e^{-z^3-3az^2-3b^2z}$ qui, moyennant certaines conditions sur a et b, donne des valeurs exceptionnelles de seconde espèce en *nombre fini*. En prenant $f(z) = e^{e^{z^2}+\sin z}$, il trouve des valeurs exceptionnelles en nombre infini.

Watson (*G.-N.*). — A Note on the solution of the linear difference equation of the first order [Note sur la solution de l'équation aux différences finies, linéaire, du premier ordre] (10-20).

L'objet de cette Note est de montrer la forme de la solution de l'équation aux différences finies

$$\varphi(x) f(x+1) - \chi(x) f(x) = 0,$$

$\dfrac{\varphi(x)}{\chi(x)}$ étant une fonction uniforme de x pour laquelle le point $x = \infty$ est un point ordinaire ou un pôle. En posant

$$\frac{\chi(x)}{\varphi(x)} = x^m v(x),$$

$$v(x) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda^2}{x^2} + \ldots,$$

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIII, 1919, 2e Partie, p. 74.

on a la solution

$$F(x) = [\Gamma(x)]^m e^{x \log \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}} \prod_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_0}{\varphi(x+p)} e^{\frac{\lambda_1}{\lambda_0(x+p)}}$$

et aussi la solution

$$F_1(x) = [\Gamma(x)]^m e^{x \log \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}} \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi(x-p)}{\lambda_0} e^{\frac{-\lambda_1}{\lambda_0(x-p)}}.$$

L'auteur donne les expressions asymptotiques de $F(x)$ et de $F_1(x)$, x étant grand et assujetti à certaines conditions.

Basset (*A.-B.*). — Singular tangent planes to autotomic surfaces [Plans tangents singuliers aux surfaces autotomiques] (21-49).

Dans un Mémoire précédent, l'auteur a donné des formules pour évaluer les nombres de plans doublement tangents des différentes espèces aux surfaces anautotomiques. Il montre ici comment ces formules se modifient pour les surfaces autotomiques.

Watson (*G.-N.*). — On a certain difference equation of the second order [Sur une certaine équation aux différences du second ordre] (50-55).

Il s'agit de l'équation

$$a_n u_{n+1} - b_n u_n + c_n u_{n-1} = 0.$$

L'auteur donne deux formes de la solution. Application aux développements en série entière de $[J_n(x)]^3$, $[J_n(x)]^2 J_{-n}(x)$, $J_n(x)[J_{-n}(x)]^2$, $[J_{-n}(x)]^3$, $J_n(x)$ étant une fonction de Bessel.

Follett (*C.-W.*). — The thêta functions as definite integrals [Les fonctions thêta comme intégrales définies] (56-62).

Application du calcul des résidus de Cauchy. En intégrant, par exemple,

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z \, q^{z^2} e^{2zix} \, dz$$

le long d'un rectangle dont les côtes sont parallèles à Ox et Oy, et dont le centre est en O, le côté parallèle à Ox étant infini, on obtient pour $\Theta_3(x)$ une expression trop compliquée pour être reproduite ici utilement. Formules analogues pour Θ_0, Θ_1, Θ_2.

Salmon (*W.-H.*). — On certain properties of the triangle [Sur certaines propriétés du triangle] (63-65).

Soient un triangle ABC et un point O. Il existe un angle ω tel qu'en faisant tourner OA, OB, OC autour de O de l'angle ω, les droites obtenues coupent

AC, BA, CB en trois points en ligne droite. Si l'on fait tourner OA, OB, OC de l'angle $-\omega$, les droites obtenues coupent AB, BC, CA en trois points en ligne droite. Enfin, si l'on fait tourner OA, OB, OC d'un angle droit, les droites obtenues coupent BC, CA, AB en trois points en ligne droite. Diverses propriétés de la figure ainsi obtenue. Cas où O est le centre du cercle inscrit, etc.

Meadowcroft (*L.-V.*). — On the proof of Lancret's theorem and other theorems on lines of curvature [Sur la démonstration du théorème de Lancret et autres théorèmes sur les lignes de courbure] (66-69).

Deux démonstrations nouvelles de ce théorème : le long d'une ligne de courbure, la variation de l'angle formé par le plan osculateur et le plan tangent à la surface est égale à l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

Démonstration de quatre autres théorèmes sur les lignes de courbure, d'ailleurs connus.

Watson (*G.-N.*). — The cubic transformation of the hypergeometric function [La transformation cubique de la fonction hypergéométrique] (70-79).

Démonstration de la formule

$$\frac{2\pi(1-z^3)^\gamma(-z)^{-3\gamma}}{\Gamma\left(\gamma+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}F\left(\gamma,\gamma+\frac{1}{3};\frac{2}{3};z^{-3}\right)+\frac{z^{-1}e^{\frac{1}{3}\pi i}}{\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}F\left(\gamma+\frac{1}{3},\gamma+\frac{2}{3};\frac{4}{3};z^{-3}\right)$$

$$=\frac{2\pi(1-z^3)^\gamma e^{-\gamma\pi i}}{\Gamma\left(\gamma+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}F\left(\gamma,\gamma+\frac{1}{3};\frac{2}{3};z^3\right)+\frac{z\,e^{-\frac{1}{3}\pi i}}{\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}F\left(\gamma+\frac{1}{3},\gamma+\frac{2}{3};\frac{4}{3};z^3\right)$$

$$=3^{\frac{3}{2}\gamma+\frac{1}{2}}e^{\pm\frac{1}{2}\gamma\pi i}\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(2\gamma+\frac{2}{3}\right)}(-x)^{-2\gamma}(1-x)^\gamma F\left(\gamma+\frac{1}{3},3\gamma;2\gamma+\frac{2}{3};x^{-1}\right),$$

dans laquelle

$$|\arg(-z)|<\frac{1}{3}\pi,\qquad |\arg(1-z^3)|<\pi,\qquad x=\frac{(z-1)(\omega-\omega^2)}{(z-\omega^2)(\omega-1)},$$

$$|x|>1,\qquad R(x)>\frac{1}{2},\qquad |\arg(-x)|<\pi,\qquad |\arg(1-x)|<\pi,$$

ω, ω^2 racines cubiques imaginaires de l'unité.

Cas particuliers où $z=0$ et $z=\infty$.

Young (*W.-H.*). — A Note on monotone functions [Note sur les fonctions monotones] (80-86).

Il s'agit de fonctions de deux variables. Une fonction bornée de deux variables qui est monotone (toujours croissante ou toujours décroissante) par

rapport à chaque variable séparément, a une intégrale double, de sorte que les points où elle est discontinue forment un ensemble de mesure nulle. Il en est de même d'une fonction monotone par rapport à l'une des variables et intégrable par rapport à l'autre. Extension au cas de plus de deux variables.

Une série de fonctions de deux variables x, y, continues par rapport à (x, y), monotones par rapport à x et y séparément, et dont la somme est une fonction continue par rapport à (x, y), est uniformément convergente.

Si tous les termes d'une série à multiple entrée convergente sont positifs, si chacun des termes et la somme elle-même sont fonctions continues par rapport à un ensemble des variables, la convergence est uniforme.

Young (*W.-H.*) *and Chisholm Young* (*Grace*). — Discontinuous functions continuous with respect to every straight line [Fonctions discontinues qui sont continues sur toute ligne droite] (87-93).

Soit

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} \quad \text{si} \quad y \geqq x^2,\ x \neq 0,$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2} \quad \text{si} \quad 0 \leqq y < x^2,\ x \neq 0,$$

$$f(x, -y) = f(x, y),$$

$$f(0, 0) = 0.$$

Cette fonction est discontinue à l'origine et cependant continue sur toute ligne droite passant par l'origine.

En sommant une infinité de fonctions de ce genre, on arrive à des fonctions continues sur toute ligne droite et discontinues par rapport à l'ensemble des deux variables pour un ensemble de points plus que numérable et cela dans toute région, si petite soit-elle à l'intérieur du carré unité.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Formulæ for the number of partitions of a number into the elements 1, 2, ..., n, up to $n = 9$ [Formules pour le nombre des partitions d'un nombre en termes de la suite 1, 2, ..., n, jusqu'à $n = 9$] (94-111).

Dans des Mémoires précédents (*Quarterly Journal*, vol. 40), l'auteur avait donné de telles formules et indiqué qu'elles se simplifient par l'introduction de la variable $x - \frac{1}{4}n(n+1)$ au lieu de x (x = nombre à partager). L'objet du présent Mémoire est de donner ces formules simplifiées.

Forsyth (*A.-R.*). — Plane curves invariantive under homographic transformations [Courbes planes invariantes par des transformations homographiques] (113-127).

Les transformations en question sont de la forme

$$z = \frac{aw + b}{cw + d}, \qquad z_0 = \frac{a_0 w_0 + b_0}{c_0 w_0 + d_0}$$

($z = x + iy$, $w = X + iY$, a, b, c, d coefficients quelconques, $z_0, w_0, a_0, \ldots$ quantités conjuguées de $z, w, a, \ldots$).

La question n'est résolue que dans des cas particuliers, pour des quartiques bicirculaires.

Hill (*J.-M.*) *and Wipple* (*F.-J.-W.*). — A reciprocal relation between generalised hypergeometric series [Une relation réciproque entre séries hypergéométriques généralisées] (128-135).

Soit

$$\Pi\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \frac{1}{(\gamma-1)(\delta-1)} + \frac{\alpha\beta}{(\gamma-1)\gamma(\delta-1)\delta} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)(\delta-1)\delta(\delta+1)} + \ldots$$

Alors

$$\Pi\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \Pi\begin{pmatrix}\gamma-\alpha & \gamma-\beta\\ \gamma & \gamma+\delta-\alpha-\beta\end{pmatrix}.$$

Applications à la recherche de la valeur asymptotique de la série lorsqu'elle cesse d'être convergente, au calcul numérique de la série dans les cas où elle est peu convergente. Résultats analogues pour des séries du même genre dépendant de six paramètres au lieu de quatre.

Barnes (*E.-W.*). — A transformation of generalised hypergeometric series [Transformation de séries hypergéométriques généralisées] (136-140).

Même sujet que le précédent.

Escott (*Edward-Brind*). — Logarithmic series [Séries logarithmiques] (141-156).

On a

$$\log\left(\frac{X+d}{X-d}\right) = 2\left[\frac{d}{X} + \frac{1}{3}\left(\frac{d}{X}\right)^3 + \ldots\right].$$

Si l'on prend pour X un polynome en x, et pour d une constante de façon que $X+d$ et $X-d$ aient des facteurs communs, on obtient des formules utiles dans le calcul des logarithmes.

L'auteur retrouve ainsi des formules connues et quelques-unes nouvelles.

Escott (*Edward-Brind*). — The calculation of logarithms [Le calcul des logarithmes] (157-167).

Les séries

$$\log\frac{X+d}{X-d} = 2M\left[\frac{d}{X} + \frac{1}{3}\left(\frac{d}{X}\right)^3 + \ldots\right]$$

et d'autres analogues donnent, quand on remplace X et d par les entiers convenablement choisis, des relations entre les logarithmes des facteurs de $X + d$ et $X - d$.

Miller (*G.-A.*). — Generalizations of the icosahedral group [Généralisations du groupe de l'icosaèdre] (168-174).

Le groupe de l'icosaèdre est complètement défini par l'une des trois séries de relations

$$s_1^2 = s_2^5 = (s_1 s_2)^3 = 1, \qquad s_1^3 = s_2^5 = (s_1 s_2)^2 = 1, \qquad s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^5 = 1,$$

entre deux de ses générateurs. On considère ici les relations plus générales

$$s_1^2 = s_2^5, \quad (s_1 s_2)^7 = (s_2 s_1)^3; \qquad s_1^3 = s_2^5, \quad (s_1 s_2)^2 = (s_2 s_1)^2;$$
$$s_1^2 = s_2^3, \quad (s_1 s_2)^5 = (s_2 s_1)^5.$$

Il y a une infinité de groupes pouvant être engendrés par deux éléments satisfaisant à l'une quelconque de ces trois séries de relations.

Les équations correspondant à ces groupes peuvent se ramener, au moyen de radicaux, à l'équation générale du cinquième degré.

Young (*W.-H.*). — On bounded, not necessarily continuous solutions of integral equations [Sur des solutions bornées, non nécessairement continues, d'équations intégrales (175-192).

Généralisation de résultats classiques, les solutions étant astreintes seulement à être bornées. Conditions nécessaires et suffisantes pour que de telles solutions existent.

Jackson (*F.-H.*). — On q definite integrals [Sur les intégrales définies d'indice q] (193-203).

La différentiation d'indice q est l'opération

$$\Delta\Phi(x) = \frac{\Phi(qx) - \Phi(x)}{qx - x},$$

qui se réduit à la différentiation ordinaire lorsque $q = 1$. L'intégration d'indice q est l'opération inverse.

Dixon (*A.-C.*). — Note on the double six [Note sur le double six] (203-209).

Forme symétrique pour les équations représentant les douze droites d'un double six (voir *Quaterly Journal*, vol. XL, p. 381-384).

Dixon (*A.-C.*). — The bitangents of a plane quartic [Les tangentes doubles à une quartique plane] (209-213).

Les méthodes de Hesse et de Aronhold sont au fond les mêmes et conduisent

directement à la forme donnée par Riemann pour les équations des tangentes doubles.

Jourdain (*Philip-E.-B.*). — A theorem in the general theory of ordered aggregates [Un théorème de la théorie générale des ensembles ordonnés] (214-219).

L'auteur montre comment on peut éviter l'usage de l'axiome de multiplication dans la démonstration de l'existence d'ensembles dérivés d'ordre transfini. Il étend ce théorème aux séries d'éléments autres que des nombres.

Burnside (*W.*). — On the coefficients in groups of linear substitutions of finite order [Sur les coefficients dans les groupes de substitutions linéaires d'ordre fini] (219-220).

Étant donnée une représentation irréductible d'un groupe, le domaine algébrique d'ordre minimum auquel on peut supposer qu'appartiennent les coefficients des substitutions de ce groupe est-il déterminé? L'auteur montre, par un exemple, qu'il n'en est pas ainsi.

Steinthal (*A.-Ernest*). — Note to a paper by Prof. Forsyth on plane curves invariantive under homographic transformation [Note sur un mémoire du professeur Forsyth relatif aux courbes planes invariantes par une transformation homographique] (221-222).

Le professeur Forsyth a donné la solution de la question (*voir* plus haut) pour des quartiques bicirculaires particulières. L'objet de la présente Note est de résoudre le problème pour les quartiques bicirculaires en général.

Burnside (*W.*). — The most general metabelian group of finite order virth two generators [Le groupe métabélien le plus général d'ordre fini avec deux générateurs] (223-226).

Soit un tel groupe avec deux générateurs P, Q, d'ordres p et q. Soit m l'ordre de $PQP^{-2}Q^{-1}$, l'ordre du groupe est $pqm^{(p-1)(q-1)}$.

Hardy (*G.-H.*). — On certain definite integrals considered by Airy and by Stokes [Sur certaines intégrales définies considérées par Airy et par Stokes] (226-240).

Il s'agit des intégrales

$$\int_0^\infty \cos(x^3 - \alpha x)\,dx, \quad \int_0^\infty \sin(x^3 - \alpha x)\,dx$$

et de quelques autres reliées à celles-ci. L'auteur les discute d'une manière systématique et retrouve les résultats connus : équations différentielles auxquelles satisfont ces intégrales considérées comme fonction de α, expressions au moyen des fonctions de Bessel.

Nicholson (*W.*). — The asymptotic expansions of Legendre functions [Les développements asymptotiques des fonctions de Legendre] (241-264).

Des développements asymptotiques des fonctions $P_n^m(\mu)$ et $Q_n^m(\mu)$ ont déjà été donnés dans le cas où m n'est pas grand par rapport à n et à μ. Le cas où cette condition n'est pas remplie est cependant important aussi dans les applications à l'analyse harmonique. C'est ce cas que l'auteur traite. Ayant principalement en vue ces applications, l'auteur ne se préoccupe pas toujours de la détermination des limites dans lesquelles ses formules sont valables. Les variables sont supposées réelles.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Bernouillian numbers and other coefficients expressed in terms of numbers of the form $\Delta^m 0^n$ [Nombres de Bernoulli et autres coefficients exprimés en fonction de nombres de la forme $\Delta^m 0^n$] (265-301).

Le titre de ce Mémoire indique suffisamment son objet. Les nombres autres que les nombres de Bernoulli dont il est parlé sont les nombres d'Euler, coefficients du développement de $\frac{1}{e^t + e^{-t}}$ et les coefficients des développements de $\frac{1}{e^t + e^{-t} + 1}$ et $\frac{1}{e^t + e^{-t} - 1}$.

Bateman (*H.*). — The linear difference equation of the third order and a generalisation of a continued fraction [L'équation aux différences linéaires du troisième ordre et une généralisation d'une fraction continue] (302-307).

De même que l'équation aux différences

$$X_n = a_n X_{n-1} + X_{n-2}$$

est en relation avec la fraction continue

$$a_1 + \frac{1}{a_2 +} \left| \frac{1}{a_3 +} \right| \cdots,$$

de même l'équation

$$X_n = a_n X_{n-1} + b_n X_{n-2} + X_{n-3}$$

est en relation avec un algorithme qui, si l'on dispose ses éléments dans l'espace à trois dimensions, apparaît comme une généralisation des fractions continues. Relation de ces algorithmes avec l'équation du troisième degré. L'extension à un nombre quelconque de dimensions est immédiate.

Hargreaves (*R.*). — The dynamical system of the spheres moving in infinite liquid [Le système dynamique de deux sphères mobiles dans un liquide de dimensions infinies] (308-324).

Le mouvement relatif d'une sphère par rapport à l'autre n'est pas toujours plan ; il n'est pas, en général, indépendant du mouvement du système. Conditions pour que ces circonstances se présentent.

Jourdain (*Philip-E.-B.*). — The development of theories of mathematical logic and the principles of mathematics [Le développement des théories sur la logique mathématique et les principes des mathématiques] (324-352).

Histoire de ce développement depuis Leibnitz jusqu'à nos jours.

Young (*W.-H.*). — On a form of the parallel axiom [Sur une forme de l'axiome des parallèles] (353-363).

L'énoncé ordinaire du postulatum a cet inconvénient qu'il fait intervenir une propriété de deux droites (ne pas se rencontrer) qui ne peut se constater sur une figure de dimensions finies. L'auteur propose l'énoncé suivant : *Il existe au moins un triangle tel que la longueur de la droite joignant les milieux de deux côtés soit égale à la moitié du troisième côté.* Il montre que l'énoncé est équivalent à l'énoncé ordinaire.

Vacca (*G.*). — A new series for the eulerian constant $\gamma = 0,577\ldots$ [Une nouvelle série pour la constante d'Euler $\gamma = 0,577\ldots$] (363-364).

C'est la série

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n+1} + \ldots - \frac{1}{2^{n+1}-1}\right).$$

Glaisher (*J.-W.-L.*). — On Dr Vacca's series for γ [Sur la série précédente] (365-368).

Autre démonstration de la formule précédente.

Basset (*A.-B.*). — On the descent of a sphere in a viscous liquid [Sur la descente d'une sphère dans un liquide visqueux] (369-381).

L'auteur avait déjà obtenu l'équation du mouvement. Des perfectionnements avaient été obtenus par MM. Picciati et Boggio. L'auteur résume tous ces résultats.

Miller (*G.-A.*). — On a method due to Galois [Sur une méthode due à Galois] (382-384).

Soient G un groupe, H un sous-groupe. G peut être représenté de l'une des deux manières suivantes :

$$G = H + HS_2 + HS_3 + \ldots + HS_\gamma,$$
$$= H + T_2 S + T_3 S + \ldots + T_\gamma H.$$

L'auteur montre qu'on peut s'arranger de façon que les S soient identiques aux T.

E. Cahen.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 170, 1er semestre 1920.

Humbert (*P.*). — Les calculs de G.-H. Darwin sur la stabilité de la figure piriforme (38-40).

Liapounov a trouvé que la figure piriforme d'équilibre d'un fluide en rotation est instable; Darwin, au contraire, en utilisant les travaux de Poincaré, a cru pouvoir conclure à la stabilité; mais l'auteur montre ici que cette conclusion n'est pas légitime : les calculs de Darwin sont exacts, mais il a considéré à tort certains termes comme négligeables.

Véronnet (*A.*). — Formation d'un astre isolé dans une nébuleuse homogène indéfinie (40-42).

En supposant, en un point d'un milieu homogène indéfini, l'introduction d'une masse créant un centre d'attraction des molécules du milieu, l'auteur calcule la durée de formation de l'astre ainsi obtenu; il applique les résultats au système solaire.

Pomey (*L.*). — Sur les nombres de Fermat (100-101).

L'auteur énonce diverses conditions nécessaires et suffisantes pour que les entiers de la forme $2^m \pm 1$ soient premiers; il en indique aussi quelques applications.

Hadamard (*J.*). — La solution élémentaire des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques non analytiques (149-154).

L'auteur désigne sous ce nom la *solution fondamentale* de M. Picard; il a

déjà donné une méthode pour former cette solution dans le cas où les coefficients sont analytiques; il indique ici comment cette méthode peut s'adapter au cas des coefficients non analytiques, mais admettant des dérivées partielles jusqu'à un certain ordre.

Les relations qui existent entre le cas où le nombre de variables indépendantes est pair et celui où il est impair, permettent d'obtenir directement les résultats de MM. Hilbert et E.-E. Lévi.

Boutroux (*P.*). — Sur une famille de fonctions multiformes associées à une équation différentielle du premier ordre (164-167).

Dans des Notes antérieures (t. 168 et 169), l'auteur a montré que l'étude des fonctions qui satisfont dans tout leur domaine d'existence à l'équation

$$zz' = 3mz + 2x^3 + bx + c,$$

dépend d'un certain groupe discontinu de substitutions; celui-ci peut être engendré au moyen d'un nombre limité de branches de fonctions substitutrices que l'on peut choisir de plusieurs manières. Il indique ici une solution simple de ce problème en prenant $b = 0$, $c = -2$; les branches en question se déduisent de deux d'entre elles par un automorphisme qui caractérise ces fonctions.

Valiron (*G.*). — Le théorème de M. Picard et les généralisations de M. Borel (167-169).

L'auteur donne une démonstration directe du célèbre théorème relatif aux valeurs que peut prendre une fonction uniforme $f(z)$ dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé; elle s'applique aux fonctions de genre infini et fournit, au sujet des modules et des arguments des zéros de $f(z) - A$ dans les diverses régions du plan, des renseignements plus complets que ceux qu'ont obtenus MM. Montel et Julia.

Ocagne (*M. d'*). — Sur la distribution des courbures autour d'un point d'une surface (169-171).

L'auteur démontre, comme conséquence d'une formule donnée par lui antérieurement, qu'en un point M d'une surface, la surface des axes de courbure des contours apparents coïncide, par rotation de 90° autour de la normale en M, avec l'inverse de la surface de Meusnier (lieu des centres de courbure en M), la puissance d'inversion étant égale au produit des rayons de courbure principaux en M.

Pesloüan (*L. de*). — Sur une congruence entre les nombres de Bernoulli (267-269).

L'auteur indique diverses formules dont on peut tirer des applications; en

2ème Partie.

particulier, on voit que le numérateur d'un nombre de Bernoulli est divisé par tout diviseur de son indice qui est premier avec son dénominateur.

Rabut (*Ch.*). — Sur la réduction des transformations de contact (313-316).

Appelons *orthique* le produit de la transformation par polaires réciproques d'une transformation ponctuelle. En utilisant la connaissance des invariants différentiels du groupe ponctuel et du groupe des transformations de contact, l'auteur démontre que *toute transformation de contact dans le plan est le produit d'une orthique par une ponctuelle.*

Birkeland (*R.*). — Une réduction des intégrales abéliennes (316-318).

L'auteur démontre, par une analyse simple, une formule d'où il découle immédiatement que toute intégrale abélienne peut être ramenée à une somme de : 1° une fonction rationnelle de x et y; 2° un nombre fini de logarithmes de fonctions rationnelles de x; 3° des intégrales abéliennes des types

$$\int x^{\mu}\theta(x, y)\,dx, \quad \int \frac{\theta(x, y)}{(x-a)^{\nu}}\,dx,$$

où μ et ν sont des nombres positifs, a une constante et θ une fonction rationnelle arbitrairement choisie, mais contenant y (par exemple $\theta \equiv y$).

Humbert (*G.*). — Sur les formes quadratiques positives d'Hermite dans un corps quadratique imaginaire (349-355).

Cette Note a pour objet d'affranchir de certaines restrictions et d'étendre les résultats indiqués par l'auteur dans plusieurs Notes du Tome 169; en particulier, la formule qui donne la mesure de l'ensemble des classes positives d'Hermite proprement primitives ou imprimitives, de discriminant donné, dans un corps donné.

Hadamard (*J.*). — Sur certaines solutions d'une équation aux dérivées fonctionnelles (355-359).

On peut déduire des différents problèmes qui se posent pour une équation aux dérivées partielles E autant de solutions d'une certaine équation fonctionnelle ε (HADAMARD, *Mémoires des Savants étrangers*, t. XXXIII); mais, en général, les solutions obtenues jusqu'ici supposent connue la loi de déformation du contour C dont dépend l'inconnue de l'équation ε. M. Black a réussi à s'affranchir de cette restriction et à obtenir une *vraie* solution de ε dans le cas où E est parabolique; en s'appuyant sur ses travaux antérieurs, l'auteur fournit la solution pour le cas d'une équation hyperbolique et sa méthode s'étend aux équations elliptiques à deux variables indépendantes.

Cerf (*G.*). — Remarques sur une généralisation du problème de Pfaff (374-376).

Soit $\omega_p = \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$; le problème de Pfaff généralisé consiste à trouver dans l'espace à n dimensions toutes les multiplicités M_t à t dimensions ($p \leq t \leq n$) telles que l'intégrale $\int \omega_p$, étendue à une multiplicité quelconque d'ordre p située sur M_t, soit nulle. L'auteur détermine le maximum τ de t, qui est dans le cas général le plus grand nombre entier tel que $n - \tau \leq C_\tau^p$.

Fontviolant (*B. de*). — Calcul des ponts circulaires, comportant un seul contreventement et des entretoisements transversaux dans toute leur longueur (376-379).

L'auteur établit les équations d'équilibre et en déduit la marche à suivre pour le calcul.

Pompeiu (*D.*). — Sur une condition équivalente à la monogénéité et sur la démonstration du théorème fondamental de Cauchy (379-381).

Si la fonction $f(z)$ est monogène au point M, l'expression

$$(z_2 - z_3) f(z_1) + (z_3 - z_1) f(z_2) + (z_1 - z_2) f(z_3)$$

tend vers zéro lorsque les trois points z_1, z_2, z_3 tendent vers M, ainsi que cela résulte de l'interprétation géométrique de la condition de monogénéité; en décomposant le plan en triangles, par trois familles de droites parallèles, l'auteur en déduit une démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale de $f(z)$ le long d'un contour fermé.

Andoyer (*H.*). — Sur la méthode de Gauss pour le calcul des perturbations séculaires (418-420).

Le calcul numérique des inégalités séculaires du premier ordre se ramène à celui de deux fonctions elliptiques; l'auteur donne ici une expression de ces fonctions au moyen de deux séries très simples dont la convergence est très rapide; une Table facilite encore le calcul.

Sakellariou (*N.*). — La courbure linéaire et aréale oblique d'une surface (446-448).

Sous ces noms l'auteur donne deux formules générales qui contiennent comme cas particuliers un grand nombre de formules classiques : courbure tangentielle, normale, totale, torsion géodésique, etc., pour la première; courbure de Gauss, courbure géodésique totale de Rodrigues, etc., pour la deuxième.

Villat (*H.*). — Sur certains mouvements cycliques avec ou sans tourbillons (449-451).

L'auteur étudie ces mouvements dans un domaine fluide annulaire, d'où l'on peut passer d'ailleurs par une transformation conforme à un autre domaine S ayant la connexion de l'anneau, et en utilisant une méthode de M. Caldonazzo. Il étudie en particulier le cas où S est limité par deux polygones réguliers concentriques, malgré la difficulté qui provient de ce qu'en chacun des angles du polygome intérieur, la ligne de courant quitte le contact avec la paroi plane pour la rejoindre plus loin.

Humbert (*G.*). — Sur le nombre des classes de formes quadratiques positives d'Hermite, de discriminant donné, dans un corps quadratique imaginaire (481-486).

L'auteur traite d'abord la question pour l'anneau $i\sqrt{3}$, puis pour le corps ou l'anneau $i\sqrt{P}$. En utilisant des formules qu'il a données précédemment, notamment pour la mesure des classes d'Hermite de discriminant donné, il démontre que dans le corps ou l'anneau $i\sqrt{P}$ une forme d'Hermite positive, primitive ou non mais propre, de discriminant Δ, n'admet que deux automorphies quand Δ n'est pas résidu quadratique de tous les facteurs premiers impairs de P.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur la convergence de certaines séries (507-509).

On sait que la série alternée $\Sigma(-1)^n f(n)$ est convergente si la fonction positive $f(x)$ tend vers zéro en décroissant; l'auteur démontre que l'on peut supprimer cette dernière condition si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f^{(m)}(z)|\,dz$ est convergente (m, arbitraire). On peut même décider, par une voie analogue, de la convergence de certaines séries multiples.

Rosenblatt (*A.*). — Sur un théorème de A. Liapounoff (510-511).

Liapounoff a démontré que parmi tous les corps homogènes de même volume, dont les points s'attirent suivant la loi de Newton, la sphère a la plus petite énergie potentielle; l'auteur annonce une démonstration de ce théorème libérée des hypothèses admises dans la précédente.

Huber (*M.-T.*). — Théorie rationnelle des hourdis en béton armé, considérés comme des plaques minces, d'une simple anisotropie orthogonale (511-513).

L'auteur donne l'équation différentielle de l'équilibre et les formules des déplacements verticaux, qui se simplifient beaucoup dans le cas d'une charge concentrée.

Humbert (*G.*). — Sur une extension du groupe modulaire dans un corps quadratique imaginaire (541-547).

Soit $f(x, y) = axx_0 + bx_0y + b_0xy_0 + cyy_0$ une forme d'Hermite, à coefficients entiers, du corps $i\sqrt{P}$ où $P \equiv 1, 2$ ou $3 \pmod 4$; soient I un idéal du corps; λ, μ, ν, ρ des entiers de I; si, dans f, on remplace x et y respectivement par $\frac{\lambda}{I}x + \frac{\mu}{I}y$, $\frac{\nu}{I}x + \frac{\rho}{I}y$, et x_0y_0 par les expressions conjuguées $\frac{\lambda_0}{I_0}x_0 + \ldots$, le résultat formel, après que l'on a écrit au dénominateur *norme* de I au lieu de I_0, est une *forme d'Hermite f' à coefficients entiers;* on a défini ainsi des *substitutions symboliques appartenant à* I, qui forment un groupe comprenant, comme cas particulier, le groupe modulaire, et dont l'auteur étudie les propriétés.

Guichard (*C.*). — Sur une propriété caractéristique des congruences qui appartiennent à un complexe linéaire (552-554).

Soient C et D les foyers d'un rayon; C_1, C_2 les réseaux déduits de C par la méthode de Laplace en allant de v vers u; D_1, D_2 les réseaux déduits de D en allant de u vers v. L'auteur démontre que le point D_1 est dans le plan CC_1C_2, et le point C_1 dans le plan DD_1D_2; cette propriété caractérise les complexes linéaires; il termine par une application relative aux réseaux de M. Wilinsky.

Gambier (*B.*). — Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre (560-563).

L'auteur cherche les couples de surfaces de translation S, S_1 applicables l'une sur l'autre de manière que les deux réseaux de translation C et Γ tracés sur S s'appliquent respectivement sur les deux réseaux analogues de S_1. Il démontre qu'il faut et suffit pour cela que les indicatrices des courbures de C et Γ soient des coniques sphériques homofocales distinctes; en dehors des cas banaux, cela correspond à quatre groupes de solutions parmi lesquels deux donnent une déformation continue de la surface S.

Fréchet (*M.*). — Sur la famille complète dérivée de la famille des ensembles « bien définis » (563-564).

A propos d'un Mémoire de M. Sierpinski, l'auteur rappelle qu'il avait déjà, et pour des ensembles plus généraux, attiré l'attention sur certaines propriétés des ensembles mesurables qui diffèrent suivant que l'on entend la mesure au sens de M. Borel ou au sens de M. Lebesgue. Il montre en terminant la relation précise qui existe entre la famille des ensembles (B) et celle des ensembles (L) précédents.

Humbert (*P.*). — Sur les fonctions de l'hypercylindre parabolique (564-566).

Si, dans l'équation de Laplace à quatre variables, on pose

$$x = uv\cos\varphi, \qquad y = uv\sin\varphi, \qquad 2z = u^2 - v^2, \qquad t = t,$$

les surfaces $u = C$ et $v = C$ sont des hypercylindres paraboliques; on obtient alors une équation admettant une certaine solution qui est un cas limite d'une fonction hypergéométrique à deux variables; c'est là une extension naturelle des propriétés de la fonction dite « du cylindre parabolique », que l'on obtient d'ailleurs par une voie analogue en partant de l'équation de Laplace à trois variables.

Renaux. — Sur un problème d'itération (567-569).

Soit une fonction $\varphi(u) = u[1 + \psi(u)]$, $\psi(u)$ étant développable en série de puissances positives de $\frac{1}{u}$ pour $|u| > R$, et considérons l'équation

$$[\varphi(U) - \varphi(u)] : (U - u) = 0;$$

u étant donné, elle lui fait correspondre un nombre fini ou infini de racines en U qui sont $F_1(u)$, $F_2(u)$, ... et constituent des substitutions de u. L'auteur étudie le problème suivant : soit un point u, on prend son symétrique u' par rapport à l'axe Ox et l'on applique à u' les substitutions F; on recommence l'opération pour les nouveaux points et ainsi de suite; étudier la répartition des points après un nombre fini ou infini d'opérations. Il étudie particulièrement le cas où $\varphi(u)$ est une fonction rationnelle. Ce problème est intimement lié à l'étude des singularités des fonctions fondamentales qui proviennent d'équations intégrales à noyau imaginaire.

Kampé de Fériet (*J.*). — Sur une application des dérivées généralisées à la formation et à l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (569-572).

En désignant par $D^{(\lambda)}f(x)$ (λ réel quelconque) la dérivée généralisée d'ordre λ de $f(x)$, l'auteur montre que si $u(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre p, dont les coefficients sont des polynomes, sa dérivée d'ordre $(-\lambda - n)$ (n convenablement choisi) vérifiera une autre équation de même nature, d'ordre $n + p$. On peut ainsi obtenir, en partant d'une équation du premier ordre, l'équation hypergéométrique de Gauss dont on obtient ainsi une solution sous une forme nouvelle.

Pesloüan (*L. de*). — Sur l'extension de la règle de l'Hôpital à certaines quantités arithmétiques (572-575).

Étude des nombres C_a^b qui expriment des combinaisons généralisées et de certaines congruences auxquelles conduisent leurs différences.

Chazy (*J.*). — Sur les singularités impossibles du problème des n corps (575-578).

L'un des premiers problèmes à résoudre est de savoir si, à l'approche d'un instant quelconque T, les distances mutuelles $r_{i,k}$ des n corps tendent vers des limites ou si certaines d'entre elles peuvent être indéterminées; l'auteur montre qu'une telle particularité n'est pas une hypothèse arbitraire, mais cela ne peut se produire que si $\Sigma m_i m_k r_{i,k}^2$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers T.

Humbert (*G.*). — Sur les groupes de M. Bianchi (625-630).

L'auteur montre que les groupes qu'il a étudiés dans sa dernière Note (*voir* plus haut) comprennent comme cas particulier les groupes étendus qu'a fait connaître M. Bianchi (*Math. Annalen*, t. 42, 1893). Il indique en outre quelques applications arithmétiques.

Gambier (*B.*). — Sur les surfaces applicables (645-647).

L'auteur obtient tous les couples de surfaces de révolution applicables l'une sur l'autre de telle sorte qu'un point réel de l'une ait pour homologue un point imaginaire de l'autre; il en indique aussi quelques exemples pour des surfaces non de révolution et termine par quelques remarques au sujet des surfaces applicables sur elles-mêmes soit complètement, soit partiellement.

Rabut (*Ch.*). — Sur le groupe des transformations planes dans lesquelles toute ligne droite reste droite (648-650).

L'auteur forme les équations explicites de ces transformations et montre qu'elles résultent d'une transformation ponctuelle précédée et suivie d'une même polarité réciproque; on peut, en partant de là, former les invariants différentiels du groupe et étudier ses propriétés.

Châtelet (*A.*). — Sur les corps abéliens de degré premier (651-653).

L'auteur indique quelques propriétés de ces corps, touchant à leur constitution et à leur nombre suivant la valeur du discriminant; il démontre en particulier que si le nombre premier q est décomposable dans un corps abélien de degré premier, de discriminant D^{n-1}, tout nombre premier congru à q (mod D) est décomposable; cela conduit à une intéressante propriété des valeurs numériques que prend le premier membre $f(x)$ d'une équation abélienne pour x entier.

Villat (*H.*). — Sur le mouvement variable d'un fluide indéfini avec sillage, en présence d'un corps solide (653-655).

M. Bénard a montré que le sillage n'est pas permanent et qu'il se produit

sur ses bords un détachement périodique et alternatif de tourbillons; l'auteur montre ici que l'introduction de ces tourbillons dans le calcul permet justement de résoudre le problème et d'obtenir une solution qui dépend du temps; la discussion conduit à des configurations qui se rapprochent beaucoup de celles qu'a notées M. Bénard.

Thiry (*R.*). — Sur un problème d'hydrodynamique admettant une infinité de solutions (656-658).

M. Villat a déjà mis en évidence une solution différente de celle de M. Levi-Cività, répondant au problème plan d'un courant, uniforme à l'infini, rencontrant un obstacle constitué par deux lames planes formant un angle concave vers le courant; la solution de M. Villat supposait une certaine relation $F = 0$ entre les constantes du problème; l'auteur montre qu'elle reste valable sous la condition $F \leqq 0$ et qu'il y subsiste un paramètre arbitraire; il y a donc une infinité de solutions reliant les deux précédentes que l'on retrouve comme cas limites.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur un théorème de Cauchy (715-718).

Soient $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des nombres positifs; l'auteur généralise un théorème de Cauchy en démontrant que la série à n entrées $\Sigma f(x + s_1\omega_1 + \ldots + s_n\omega_n)$, où Σ est étendue à toutes les valeurs entières non négatives des s, est uniformément convergente pour $x \geqq a$ si $\lim\limits_{x=\infty} x^{n+\varepsilon} f^{(n)}(x) = 0$ $(\varepsilon > a)$ et si l'intégrale $\int_0^\infty dt_n \ldots \int_0^\infty f(a + t_1 + \ldots + t_n)\, dt_1$ est convergente.

Il en déduit une généralisation d'un théorème de M. Borel en démontrant que, sous certaines hypothèses, les séries $\Sigma f(n)$ et $\Sigma f[\psi(n)]\psi'(n)$ sont en même temps convergentes ou divergentes.

Julia (*G.*). — Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (791-793).

L'auteur étend aux fonctions de plusieurs variables la notion connue de *famille normale* dans un volume; les critériums sont d'ailleurs les mêmes que pour le cas d'une variable. Cela étant, soit une famille de fonctions holomorphes dans V; l'ensemble E des points de V où la famille cesse d'être normale jouit de propriétés remarquables, analogues à celles des singularités des fonctions analytiques de plusieurs variables et qui se résument en un théorème dont l'essentiel est que les points de E ne sont pas *isolés*.

Mineur (*H.*). — Sur les solutions discontinues d'une classe d'équations fonctionnelles (793-796).

L'auteur étudie certaines solutions $y = f(x)$ des équations fonctionnelles de la forme $f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)]$, où φ et ψ sont données, qui consti-

tuent un ensemble ayant la puissance du continu. Cette étude fournit en particulier la propriété suivante : tout groupe commutatif à un paramètre ayant la puissance du continu est semblable au groupe des translations, moyennant certaines hypothèses d'uniformité.

Fontviolant (*B. de*). — Calcul des ponts circulaires, à travées continues, comportant un seul contreventement et des entretoisements transversaux dans toute leur longueur (796-798).

L'auteur établit, pour le cas des travées continues, le calcul déjà fait dans sa Note précédente (*voir* plus haut) pour le cas des travées indépendantes.

Rémoundos (*G.*). — Sur les fonctions croissantes et les fonctions entières (829-832).

En utilisant les inégalités fournies par un théorème fondamental de M. Borel sur les fonctions croissantes, l'auteur obtient une série de propositions qui précisent et étendent certaines propriétés des fonctions entières, de genre fini ou infini, et en particulier le théorème de M. Hadamard sur le nombre des zéros intérieurs à un cercle.

Humbert (*P.*). — Sur une nouvelle application de la fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ (832-834).

Cette fonction a été définie par l'auteur dans sa dernière Note (*voir* plus haut) : elle est un cas limite de la fonction hypergéométrique F_2 de M. Appell ; il montre ici comment elle peut servir à former des solutions de l'équation de Laplace à quatre variables.

Brouwer (*L.-E.-Z.*). — Énumération des classes de transformations du plan projectif (834-835).

Une transformation est de première ou de deuxième espèce suivant que, appliquée à une courbe simple fermée et unilatérale, elle donne naissance à une image uni ou bilatérale; l'auteur divise ces transformations en *classes* et montre que ces classes sont caractérisées par leur *degré* ou par leur *parité* suivant qu'il s'agit de transformations de première ou de deuxième espèce.

(*A suivre.*)

2 eme Partie

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 170, 1er semestre 1920 (*fin*).

Andrade (*J.*). — Extension des systèmes conservatifs et généralisation d'un théorème de M. Painlevé (835-837).

Considérons un milieu où l'on aurait, entre la force, la masse, l'accélération et la vitesse, l'égalité vectorielle $F = kmJ\varphi(V^2)$; l'auteur montre que les conséquences du théorème des forces vives seraient encore valables et que cette loi permettrait l'emploi de la balance et la mesure mécanique du temps fondée sur les lois des petits mouvements.

Julia (*G.*). — Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (875-877).

Les points où une famille de fonctions $f(x, y)$, holomorphes dans un volume V, cesse d'être normale forment un ensemble parfait dont l'auteur a indiqué quelques propriétés dans sa dernière Note (*voir* plus haut); il en continue ici l'étude en ce qui concerne surtout d'importantes et remarquables propriétés métriques.

Bianchi (*L.*). — Sur les couples de surfaces à lignes de courbure associées (878-880).

L'auteur désigne ainsi des surfaces rapportées à leurs lignes de courbure :

$$ds^2 = H_1^2\,du_1^2 + H_2^2\,du_2^2, \qquad ds'^2 = H_1'^2\,du_1^2 + H_2'^2\,du_2^2$$

et telles que

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i} = \frac{1}{H_k'}\frac{\partial H_i'}{\partial u_k} \qquad (i, k = 1, 2);$$

c'est-à-dire ayant les mêmes *rotations* mais permutées. Il indique plusieurs moyens d'obtenir de tels couples lorsqu'on en connaît déjà un; dans certains cas il suffit d'une inversion par rapport à l'origine; la considération des *images sphériques* du couple conduit alors aux transformations de Ribaucour et aux congruences de M. Guichard.

Julia (*G.*). — Propriétés nouvelles de certaines classes très générales de fonctions entières ou méromorphes (917-919).

Soit une fonction méromorphe $f(z)$ douée de valeur asymptotique; à tout nombre $\sigma[|\sigma| > 1]$ correspond un ensemble E_σ de points pour lesquels la famille de fonctions $f(\sigma^n z)$ n'est pas normale; l'auteur a étudié antérieurement E_σ et montré son utilité (*voir* t. 168, p. 718); il montre ici que si $f(z)$ est d'ordre

non nul, E_σ existe toujours sauf si la suite de valeurs $f(z_0\sigma^n)$ est dense dans tout le plan, quel que soit z_0. On peut étudier de même la famille de fonctions $f(z + p\omega_1 + q\omega_2)$, où p et q prennent toutes les valeurs entières, ce qui fournit en particulier d'intéressantes propriétés des fonctions elliptiques.

Sierpinski (*W.*). — Sur les fonctions de première classe (919-922).

L'auteur généralise un théorème de M. Lebesgue en démontrant que pour qu'une fonction discontinue d'une variable réelle $f(x)$ soit de première classe, il faut et il suffit que les ensembles de points (x, y) définis l'un par $f(x) > y$, l'autre par $f(x) < y$, soient sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés.

Lange-Nielsen (*F.*). — Sur une généralisation du théorème de Rolle (922-924).

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine fermé A limité par une courbe sans point multiple C, et telle que $|f(z)| = k$ sur C. Si $f(z)$ s'annule en plusieurs points de A, $f'(z)$ s'annulera au moins en un point de A, lequel sera un point multiple du système de courbes défini par les équations $|f(z)| = \text{const}$.

Maillet (*E.*). — Sur quelques propriétés des nombres transcendants (983-986).

L'auteur étudie les nombres de Liouville au moyen d'un procédé nouveau (*suites complètes*) et en indique quelques propriétés relatives à la nature algébrique de diverses relations qui peuvent relier ces nombres, soit entre eux, soit avec d'autres nombres transcendants.

Julia (*G.*). — Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (1040-1042).

Posons $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ et soit $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ une hypersurface S; dans le voisinage d'un de ses points, cette surface divise l'hyperespace en deux régions qui se distinguent par le signe de φ. L'auteur montre que pour qu'il existe dans l'une des régions une famille de fonctions holomorphes $f(x, y)$, normale en tout point intérieur à la région et cessant d'être normale sur S, il est nécessaire qu'une certaine expression $F(\varphi)$, formée avec les dérivées de φ jusqu'au deuxième ordre reste $\leqq 0$ sur toute la portion de S considérée; il ne pourra exister de famille normale dans les deux régions que si $F(\varphi) = 0$.

Jekhowsky (*B.*). — Sur les équations différentielles du second ordre vérifiées par les fonctions de Bessel à plusieurs variables (1042-1045).

Les fonctions de Bessel à n variables vérifient $\frac{n^2 - n + 2}{2}$ équations linéaires

du deuxième ordre distinctes, dont quelques-unes ont une forme compliquée; l'auteur indique un procédé simple pour les former toutes.

Kampé de Fériet (*J.*). — Sur l'emploi des dérivées généralisées pour la formation et l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (1045-1048).

L'auteur étend les résultats énoncés dans sa dernière Note (*voir* plus haut); cela permet en particulier d'obtenir une relation intéressante entre les fonctions de Bessel; la méthode peut d'ailleurs s'appliquer à certains systèmes d'équations aux dérivées partielles, tels que celui que vérifie la fonction hypergéométrique F_2 de M. Appell.

Hondros (*D.*). — Sur l'intégration de l'équation de Laplace entre deux sphères non concentriques (1051-1053).

L'auteur fait un changement de variables, les nouvelles surfaces de coordonnées formant un système triple orthogonal constitué par deux familles de sphères et une famille de plans; en cherchant alors une solution de forme particulière, il ramène le problème à l'intégration de l'équation hypergéométrique à une variable, dont toute solution permet ainsi de former une solution de l'équation de Laplace, contenant une constante arbitraire.

Guichard (*C.*). — Sur les réseaux et les congruences conjugués par rapport à un complexe linéaire (1093-1096).

Soient Δ une droite qui décrit une congruence, A et B ses foyers; A_1, A_2, ... et B_1, B_2, ... la suite de réseaux déduits de A et B par la transformation de Laplace; soient enfin Δ' la conjuguée de Δ par rapport à un complexe linéaire, A'_i, B'_i les analogues de A_i, B_i. L'auteur étudie les relations qui existent entre ces divers réseaux en les projetant sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe; le cas où Δ fait elle-même partie du complexe est traité à part.

Boutroux (*P.*). — Sur une famille de fonctions multiformes définies par des équations différentielles du premier ordre (1098-1100).

La méthode qui a permis à l'auteur (*voir* plus haut) d'étudier les intégrales de l'équation $zz' = 3mz + 2x^2 + bx + c$ peut s'étendre aux équations de la forme générale

$$(B_0 + B_1 z + \ldots + B_q z^q) z' = A_0 + A_1 z + \ldots + A_p z^p,$$

où A_i et B_i sont des polynomes en x; l'intégration de ces équations se ramène à l'étude d'un groupe de substitutions effectuées sur un paramètre.

Janet (*M.*). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles (1101-1103).

L'auteur indique un procédé nouveau et simple pour écrire les conditions d'intégrabilité d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles et déterminer le degré de généralité des intégrales.

Cerf (*G.*). — L'analyse des tenseurs antisymétriques et les formes symboliques de différentielles (1104-1106).

En considérant les composantes $F_{\lambda\mu}$ d'un champ de tenseurs antisymétriques d'Einstein comme les coefficients d'une forme différentielle symbolique

$$\Sigma F_{\lambda\mu}\, dx_\lambda^{\prime} dx_\mu,$$

et en utilisant les réductions de cette forme à une forme canonique, l'auteur détermine des systèmes de coordonnées qui donnent des expressions simplifiées pour un tenseur donné.

Donder (*T. de*) et *Vanderlinden* (*H.*). — Les nouvelles équations fondamentales de la gravifique (1107-1109).

Dans la théorie gravifique admise, la force généralisée est toujours nulle; les auteurs indiquent comment on peut la modifier, tout en conservant le principe d'Hamilton, de manière que cette force soit en général différente de zéro.

Humbert (*P.*). — Sur la solution générale du système auquel satisfait la fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ (1152-1155).

L'étude des fonctions de l'hypercylindre parabolique, poursuivie par l'auteur dans ses Notes précédentes, le conduit à la solution générale du système

$$x^2 r - q xy + z\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{2} + kx + \frac{1}{4} - \mu^2\right) = 0,$$
$$y^2 t - p xy + z\left(-\frac{y^2}{4} - \frac{xy}{2} + ky + \frac{1}{4} - \nu^2\right) = 0$$

qui dépend linéairement de quatre constantes arbitraires; il indique diverses expressions des fonctions qui la constituent au moyen des polynomes d'Hermite et des fonctions hypergéométriques de deux variables.

Nils Pipping. — Un critérium pour les nombres algébriques réels, fondé sur une généralisation directe de l'algorithme d'Euclide (1155-1156).

Soient $n+1$ nombres positifs $v_0 \geqq v_1 \geqq v_2 \geqq \ldots \geqq v_n > 0$; s'ils sont tous différents nous formerons n autres systèmes analogues au précédent en remplaçant dans

celui-ci v_0 par $v_0 - v_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, n$). Si aucun de ces systèmes ne renferme deux nombres égaux, nous appliquerons à chacun d'eux la même règle, ce qui donne n^2 systèmes, etc.; l'algorithme s'arrête lorsque l'un des systèmes contient deux nombres égaux. L'auteur annonce que pour que le nombre positif ω soit algébrique de degré p, il faut et il suffit que l'algorithme, appliqué au système $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^n$, s'arrête pour $n = p$ et non pour $n = p - 1$.

Drach (*J.*). — Sur le mouvement de l'axe d'un solide homogène pesant de révolution qui a un point fixe sur cet axe (1156-1159).

Soit P le point à la distance 1 du point fixe; ce point sera déterminé par deux angles : la distance zénithale θ et l'azimut ω; les équations qui déterminent $\cos\theta$ et ω peuvent se discuter très simplement et fournissent une méthode élégante et élémentaire pour l'étude du mouvement de l'axe, faite habituellement au moyen de fonctions elliptiques.

Goursat (*E.*). — Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre (1217-1222).

Appelons *résolvante* d'un système de Pfaff (S) une équation aux dérivées partielles du second ordre E, à deux variables indépendantes, telle qu'à toute intégrale de E correspondent des intégrales à deux dimensions de S ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires; lorsqu'un même système admet plusieurs résolvantes, celles-ci se correspondent par une transformation de Bäcklund. En remplaçant une équation donnée E par le système de Pfaff équivalent et par les systèmes *prolongés* qui s'en déduisent, on obtient des systèmes (S) qui peuvent admettre des résolvantes nouvelles, autres que E, ce qui fournit des transformations de E. Cette théorie éclaire et étend considérablement le champ des transformations des équations du second ordre.

Guichard (*C.*). — Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et telles que les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces focales (1230-1233).

Soit P un plan perpendiculaire à l'axe du complexe; l'auteur démontre que tous les réseaux qui ont même représentation sphérique qu'un réseau O ont pour polaires réciproques, par rapport au complexe, des réseaux qui ont même projection sur P. Il en déduit diverses transformations des réseaux O et quelques propriétés caractéristiques des réseaux transformés.

Julia (*G.*). — Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (1234-1236).

Dans sa Note précédente, dont on conserve les notations (*voir* plus haut), l'auteur a démontré une proposition qui revient à dire que : les points P de l'hyperespace V où la famille de fonctions $f(x, y)$ cesse d'être normale sont les *points limites* de l'ensemble des continus $f(x, y) = 0$; il démontre ici une

propriété réciproque en formant une famille de fonctions $\varphi_n(x, y)$, holomorphes dans V, ayant mêmes zéros qu'une suite de fonctions $f_n(x, y)$ et qui ne cesse d'être normale dans V qu'aux points P limites d'une infinité de continus $f_n(x, y) = 0$.

Janet (*M.*). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles et les systèmes de formes algébriques (1236-1239).

La théorie développée par l'auteur dans sa Note précédente (*voir* plus haut) met en évidence certaines propriétés des systèmes linéaires d'où l'on peut tirer des résultats qui complètent la théorie des formes algébriques de M. Hilbert.

Véronnet (*A.*). — Figures d'équilibre d'un liquide en rotation. Ordre de succession des figures critiques de bifurcation (1303-1305).

L'auteur généralise la démonstration qu'a donnée M. Appell du théorème de Poincaré sur le premier ellipsoïde de bifurcation et détermine ainsi très simplement l'ordre d'apparition des autres figures de bifurcation.

Huber (*M.-T.*). — Sur la généralisation d'un théorème de M. Mesnager concernant le sens des déplacements d'une plaque rectangulaire (1305-1308).

M. Mesnager a démontré qu'une charge appliquée en un point quelconque d'une plaque isotrope rectangulaire posée provoque l'abaissement de tous les points de la plaque; l'auteur montre que dans le cas d'une anisotropie simple orthogonale (béton armé, tôle ondulée, etc.) ce résultat n'est exact que si une certaine inégalité est vérifiée; sinon, quelques parties de la plaque peuvent se soulever.

Julia (*G.*). — Les fonctions de deux variables complexes et les fonctions limites de fonctions analytiques, uniformes ou multiformes, d'une variable (1363-1365).

L'auteur applique les propriétés des suites de fonctions $f_n(x, y)$ étudiées dans ses précédentes Notes (*voir* plus haut) à l'étude des suites de fonctions $y_n(x)$ déduites de $f_n(x, y) = 0$.

Thiry (*R.*). — Sur la représentation conforme de domaines doublement connexes à contours rectilignes (1366-1368).

En généralisant la méthode de Schwartz, l'auteur donne le moyen de réaliser effectivement par le calcul la représentation conforme d'un domaine doublement connexe, limité par deux polygones, sur un anneau circulaire.

Villat (*H.*). — Sur la représentation conforme des aires doublement connexes (1368-1371).

L'auteur montre que la solution du problème résolu ci-dessus par M. Thiry peut s'obtenir par une méthode qu'il a publiée antérieurement; celle-ci s'applique même si les frontières ne sont plus polygonales mais quelconques.

Gambier (*B.*). — Surfaces de translation de Sophus Lie (1371-1374).

L'auteur détermine toutes les surfaces de translation algébriques, dans l'espace à trois dimensions; elles se réduisent à neuf types dont deux sont composés de surfaces susceptibles d'une infinité de générations; il termine en donnant un exemple de surface de Lie unicursale dans l'espace à n dimensions.

Guichard (*C.*). — Détermination des congruences C et des congruences 2O qui appartiennent à un complexe linéaire (1429-1433).

Ce calcul se ramène à la résolution d'un système complet et à celui des éléments d'un déterminant du quatrième ordre qui satisfait à diverses conditions; la méthode se généralise aux congruences pC et $(p+1)$O qui appartiennent à un complexe linéaire.

Cartan (*E.*). — Sur la déformation projective des surfaces (1439-1442).

Deux surfaces sont *projectivement applicables,* au sens de M. Fubini, si l'on peut établir entre elles une correspondance ponctuelle telle que deux portions infiniment petites correspondantes soient projectivement égales, aux infiniment petits près du troisième ordre. L'auteur démontre ici que les surfaces non réglées ainsi déformables sont exceptionnelles et dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument; les caractéristiques du système différentiel qui les définit ont des propriétés remarquables; enfin les déformées d'une telle surface constituent une famille dépendant de trois constantes arbitraires au plus, autres que les constantes de position.

Andrade (*J.*). — Sur les droites spéciales de contact des hélices générales (1442-1444).

En dehors d'un cas évident, une droite invariablement liée au trièdre fondamental d'une courbe gauche donnée, C, n'admet d'enveloppe que s'il existe une certaine relation du deuxième degré, entre la courbure et la torsion de C; cette relation est vérifiée pour les hélices et l'auteur étudie dans ce cas la congruence formée par ces droites, laquelle admet un cône directeur à base circulaire.

Humbert (*P.*). — Fonctions de l'hyperparaboloïde de révolution et fonctions hypersphériques (1482-1484).

Le même calcul, qui met en évidence la manière dont les fonctions du cylindre parabolique dérivent des polynomes de Legendre, permet de voir une connexion semblable entre les fonctions de l'hyperparaboloïde de révolution, étudiées par l'auteur dans ses Notes précédentes, et les polynomes hypersphériques zonaux d'Hermite.

Rémoundos (*G.-J.*). — Sur le module et les zéros des fonctions analytiques (1557-1560).

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine fini; l'auteur énonce deux théorèmes relatifs au nombre des zéros et au module minimum de $f(z)$. Dans le cas où $f(z)$ est algébroïde, ces théorèmes conduisent à des généralisations de ceux de M. Schottky et de MM. Picard-Landau.

Chazy (*J.*). — Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment (1560-1563).

Les trois distances mutuelles peuvent être soit bornées, soit infiniment grandes et dans ce cas il y a lieu d'étudier l'ordre d'infinitude. L'auteur donne l'énumération des seuls cas reconnus possibles, lesquels d'ailleurs correspondent (sauf peut-être l'un d'eux) à des trajectoires existant réellement.

E. Gau.

2ème Partie

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

6e série, Tome VIII, 1912.

Duhem (*P.*).— Sur le principe d'Optique géométrique énoncé par Fermat (p. 1-58) : *Lorsqu'on remplace le trajet suivi par un rayon lumineux par un trajet infiniment voisin, la variation première de la durée du parcours est égale à zéro;* ce n'est point du tout ce qu'on est convenu d'appeler Principe de Fermat, d'après lequel *la lumière suivrait un trajet tel que son parcours ait lieu dans le temps minimum.*

En l'absence de tout enseignement sur le signe de la variation seconde, on ne peut décider si la durée de parcours du rayon lumineux est ou non un minimum.

Duhem détermine avec précision certaines conditions où l'on peut affirmer que le trajet correspond à une durée *minimum*, et certaines autres où cette durée *n'est pas un minimum.*

Quelques résultats sont transportés à la Mécanique.

Gronwall (*T.-H.*).— Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrâmmes à points alignés (p. 59-102).

Les équations dont le premier membre est mis sous forme de déterminant ont de précieuses propriétés et se prêtent à d'intéressantes études : les équations indéterminées, par exemple; c'est un vaste champ de recherches encore peu exploré.

L'auteur étudie les conditions pour qu'une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

où F est une fonction analytique des trois variables x, y, z, puisse être ramenée à la forme

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0,$$

qui est assez particulière, il est vrai. Ces conditions sont essentiellement qu'il existe une intégrale commune à deux équations aux dérivées partielles. Puis un procédé de calcul des fonctions f_i, g_i, h_i est donné.

Kœnigs (*G.*). — La loi des courbures des profils superficiels conjugués dans les mouvements à un seul paramètre (p. 103-158).

Les couples formés par deux courbes (conjuguées) qui, solidaires chacune d'un corps en mouvement, restent tangentes entre elles au cours de leurs mouvements relatifs, avaient déjà fait l'objet de travaux de M. Kœnigs; en limitant l'étude des circonstances du mouvement à ce qui se passe pour une surface plane ou sphérique glissante, on se trouve dans le cas particulier du mouvement d'une figure plane ou sphérique se déplaçant sur son plan ou sur sa sphère. Toute courbe solidaire de cette figure possède naturellement une enveloppe sur le plan ou sur la sphère regardés comme fixes.

De là naît la double théorie des profils conjugués curvilignes plans ou sphériques, qui remonte à Euler.

La généralisation de ces théories, qui a préoccupé divers géomètres, dépend d'un problème comportant trois inconnues et se réduisant à un autre problème à une seule inconnue, mais qui présente de grandes difficultés.

Borel (*E.*). — Le calcul des intégrales définies (p. 159-210).

« Les applications ne sont pas l'unique but des mathématiques et, admettrait-on ce point, il n'en resterait pas moins que certaines spéculations, aujourd'hui sans rapports visibles avec aucune application, se révéleront peut-être demain comme très fécondes en résultats pratiques », et il y a le plus grand intérêt à distinguer, entre les calculs qui peuvent être réellement effectués et ceux qui ne peuvent pas l'être, à étudier à part les nombres et les fonctions effectivement calculables.

Un nombre α est *effectivement* calculable quand on sait obtenir un nombre rationnel qui diffère de α de moins de $\frac{1}{n}$, n étant un entier connu. Premier problème : égalité ou inégalité de deux nombres calculables; deuxième problème : un nombre, tel que e, π, la constante d'Euler, appartient-il ou non à une catégorie définie ?

Une fonction sera calculable quand sa valeur pourra être calculée pour toute valeur calculable (*voir* ci-dessus) de la fonction; aux fonctions calculables, on peut opposer les fonctions à définitions asymptotiques, par exemple celles qui sont égales à 0 ou à 1, suivant que la variable x est un nombre rationnel ou irrationnel.

Ici s'introduit la théorie nécessaire des ensembles, en commençant par la théorie de la mesure, dont M. Borel avait donné la définition dès 1898, définition qui a été le point de départ de la théorie tout entière, mais dont M. Borel donne un mode d'exposition nouveau, plus simple, plus général; des notions jusqu'alors confuses peuvent être désormais précisées, dans les Chapitres relatifs aux définitions des intégrales, à leurs calculs effectifs; l'intégrale de Cauchy peut enfin être généralisée, problème qui a été l'origine des principales recherches de l'auteur sur cette belle question de la mesure.

Boussinesq (*J.*). — Théorie géométrique, pour un corps non

rigide, des déplacements bien continus, ainsi que des déformations et rotations de ses particules (p. 211-227).

Les problèmes, étudiés avec une extrême simplicité, sont classiques : déplacement et déformation d'une particule élémentaire; existence dans la particule d'un trièdre de fibres principales et de feuillets principaux, qui reste rectangulaire. Rotations de ce trièdre et dilatations principales de la particule. Cas particulier.

Roy (*L.*). — Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles (p. 229-329).

L'étude de l'équilibre et du mouvement des membranes a fait l'objet de très nombreux travaux depuis Euler, Lagrange, Poisson, Lamé; Duhem a donné une forme entièrement satisfaisante des conditions d'équilibre, en partant du principe de la Thermodynamique.

Euler, puis Lagrange, Poisson se sont occupés du mouvement transversal, Poisson, Lamé et Duhem des équations du mouvement tangentiel.

Les résultats de ces géomètres supposent la température uniforme et constante et la viscosité nulle, ce qui fait que l'étude du mouvement des membranes est en retard sur celle des fluides.

L'auteur obtient les équations générales du mouvement des membranes, en tenant compte de la viscosité et des variations de température, puis il s'occupe de la propagation des ondes en s'inspirant des travaux de Duhem; il arrive à des résultats qui ont leurs analogues en hydrodynamique.

Véronnet (*A.*). — Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre (p. 331-463).

L'auteur s'est proposé de reprendre et de compléter les travaux sur la figure d'équilibre de l'ellipsoïde hétérogène en rotation. Il étudie le cas général de vitesse et d'aplatissement, puis le cas pratique d'une vitesse lente, d'abord en première approximation, en négligeant e^2 ou λ^4, puis en seconde approximation; il tient compte des limites imposées à l'aplatissement de la Terre par la considération de la précession et de l'attraction.

Il soumet ces différents problèmes à des calculs pratiques et numériques, afin de vérifier les calculs théoriques.

Le cas général des ellipsoïdes de révolution est traité et, ce qui est extrêmement intéressant, une limite supérieure de $\frac{1}{e}$ (297,40) est obtenue; cette limite est abaissée à 297,22 par des calculs numériques, cependant que la limite inférieure (297,10) de M. Poincaré est reportée à 297,13. En tenant compte du terme en λ^4, on trouve $\frac{1}{e} = 297{,}12 \pm 0{,}38$, à 0,01 près.

R. de Montessus de Ballore.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.

Tome LI, 1915-1916 (1).

Catania (*S.*). — [V 1] Sulle condizioni che caratterizzano una classe di grandezze [Sur les conditions qui caractérisent une classe de grandeurs] (27-37).

Cette Note présuppose que le lecteur ait connaissance des travaux suivants :

Burali-Forti (*C.*). — Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri (*Atti di Torino*, 1904).

Burali-Forti (*C.*). — I numeri reali come operatori per le grandezze (*R. Acc. dei Lincei*, marzo 1915).

Catania (*S.*). — Grandezze e numeri (Catania, 1915).

Les huit conditions posées dans les deux premiers de ces travaux ne sont pas suffisantes pour établir une théorie générale des grandeurs et des nombres; il faut y joindre la proposition

$$x, y \varepsilon u \sim \iota o . y < x : \supset : x + y > x,$$

ou bien la propriété commutative pour l'opération $+$.

Tavani (*F.*). — [E 1] Intorno alla teoria della funzione $\Gamma(\rho)$ e sue relazioni con altri integrali definiti [Sur la théorie de la fonction $\Gamma(\rho)$ et sur ses relations avec d'autres intégrales définies] (38-50).

La méthode de l'auteur pour l'étude de l'intégrale

$$\Gamma(\rho) = \int_0^\infty x^{\rho-1} e^{-x} dx$$

consiste à considérer comme un nombre complexe cette fonction ainsi que la fonction

$$Z(\rho) = 1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} + \ldots = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}}{e^x - 1} dx,$$

où la partie réelle de ρ est > 1. Il obtient l'expression de nouvelles intégrales relatives à la théorie des $\Gamma(\rho)$ et des $Z(\rho)$.

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 1920, p. 79.

Ricci (*C.-L.*). — [T 2] L'equilibramento delle masse rotanti a grande velocità [L'équilibrement des masses tournant à grande vitesse]. Note Ire (avec une Table) (83-117). Note IIe (avec une Table) (188-226).

Cantelli (*F.*). — [C 2*j*] Resti nelle formule di quadratura [Sur les restes dans les formules de quadrature] (118-142).

Vitali (*G.*). — [D 1*c*] I teoremi della media e di Rolle [Sur le théorème de la moyenne et sur le théorème de Rolle] (143-147).

Se rapporte à la Note de M. Fubini dans ces *Atti*, t. L., p. 293, et à une autre Note aussi de M. Fubini dans les *Rendiconti des Lincei*, t. XXIX, 1915, 1er semestre, p. 69.

Sans faire de restrictions sur la fonction additive considérée, on peut démontrer les deux théorèmes en limitant convenablement la nature du champ.

Vergerio (*A.*). — [H 11*c*] Sull' equazione integrale di Fredholm di seconda specie [Sur l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce] (227-237).

Dans l'équation

$$u(s) = h(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(st)\, h t\, dt$$

on suppose que, pour le noyau $\mathrm{K}(st)$, il existe un nombre fini n tel qu'entre les noyaux itérés d'ordre $\leqq n$ on ait la relation à coefficients constants

$$a_0 \mathrm{K}_n(st) + a_1 \mathrm{K}_{n-1}(st) + \ldots + a_{n-2} \mathrm{K}_2(st) + a_{n-1} \mathrm{K}(st) = 0.$$

Ayant posé

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

l'auteur trouve que, lorsque $\Delta_n \neq 0$, l'équation a une solution unique. Si $\Delta_n = 0$, il y a seulement un cas, qu'il indique précisément, dans lequel on a des solutions (en nombre infini). Il trouve une nouvelle formule de résolution en se servant des résultats obtenus par lui dans une Note insérée aux *Rendiconti des Lincei*, 1915.

Peano (*G.*). — [X] L'esecuzione tipografica delle formole mate-

matiche [L'exécution typographique des formules mathématiques] (279-286).

Manière d'éviter les notations trop compliquées et qui occupent plusieurs lignes de composition.

Jadanza (*N.*). — [T 3*a*] Il annocchiale panfocale di Porro e due problemi di anallattismo [Sur la lunette panfocale de Porro et sur deux problèmes d'anallactisme] (378-387).

Albenga (*G.*). — [T 2] Sulle linee d'influenza delle tensioni interne negli archi [Sur les lignes d'influence des tensions internes dans les arcs] (454-457).

Somigliana (*C.*). — [R 5*aα*] Sulle derivate seconde della funzione potenziale di superficie [Sur les dérivées secondes de la fonction potentielle de surface] (501-508).

Formules relatives aux discontinuités, trouvées par la méthode employée par Neumann (*Math. Ann.*, Bd XVI), et Beltrami (*Ann. di Mat.*, série 2ª, t. X, 1880).

Panetti (*M.*). — [R 8*e*] Sul problema dinamico dei rotismi epicicloïdali [Sur le problème dynamique des rouages épicycloïdaux] (508-512).

Vacca (*G.*). — [K 9*b*] Sul poligono regolare di 17 lati [Sur le polygone régulier de 17 côtés] (513-517).

Exposition en forme nouvelle et plus simple de la démonstration d'Ampère (*voir* Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, Paris, 1858).

Rossi (*A.-G.*). — [T 7*c*] Un trasformatore dinamico per correnti alternate [Un transformateur dynamique pour courants alternés] (624-642). Note II (807-823).

Terracini (*A.*). — [B 9*c*] Sulla rappresentazione delle forme quaternarie mediante somme di potenze di forme lineari [Sur la représentation des formes quaternaires par des sommes de puissances de formes linéaires] (643-653).

Excepté les cas de $n = 2$ et de $n = 4$, la forme quaternaire générale de

degré n peut se représenter par la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de p_n formes linéaires, étant

$$p_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)+6\tau_1}{24},$$

où τ_1 est le plus petit entier positif ou nul pour lequel p_n devient entier.

Pour $n = 2$ et $n = 4$, on a respectivement $p_2 = 4$ et $p_4 = 10$.

Ce résultat, obtenu par Campbell (*Messenger of Math.*, vol. XXI, 1891-1892, p. 158), est démontré par l'auteur par des considérations géométriques.

Terracini (*A.*). — [Q 2] Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà [Sur certaines questions relatives aux espaces tangents et osculateurs à une variété]. Note II (695-714).

Faisant suite à la Note de même titre du Tome XLIX de ces *Atti*, p. 214. Le problème de déterminer les variétés V_k représentant des équations de Laplace linéaires et indépendantes de nombre inférieur à

$$\frac{k(k-1)}{2} + l$$

et telles que la variété de leurs S_k tangents ait la dimension

$$2k - l \quad (0 < l < k-1),$$

a été résolu pour $k < 4$. L'auteur le résout pour $k = 4$.

Somigliana (*C.*). — [R 5*a*] Sulle derivate seconde della funzione potenziale di doppio strato newtoniano [Sur les dérivées secondes de la fonction potentielle d'une double couche newtonienne] (800-806).

Application de la méthode Neumann-Beltrami, comme dans l'autre Note (p. 501), pour déterminer les discontinuités.

Bottasso (*M.*). — [R 2*b*, 4*a*] Teoremi sui massimi e minimi geometrici e su normali a curve e superficie [Théorèmes sur les maxima et minima géométriques et sur des normales à des courbes et à des surfaces] (844-867).

Démonstration, par le calcul des formations géométriques de Grassmann-Peano (*voir* Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann*, Torino 1888), des théorèmes énoncés par M. Peano dans les *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. II, 1888, p. 189. Autres théorèmes nouveaux démontrés par la même méthode.

Fubini (*G.*). — [C 1*e*] I teoremi di Bernstein e Pringsheim per lo sviluppo in serie di Taylor [Les théorèmes de Bernstein et

de Pringsheim pour le développement en série de Taylor] (896-898).

Poli (*C.*). — [H 14 *c*] Un teorema di esistenza per equazioni integrali non lineari [Un théorème d'existence pour des équations intégrales non linéaires] (912-922).

M. Fubini (*Ann. di Mat.*, 1903, p. 217) a démontré le théorème suivant : « Soit $u_1, u_2, \ldots$ une succession de fonctions de r variables, telles que $\int (u_n p)^2 dp$ ait une limite supérieure H^2; il y a une succession $v_1, v_2, \ldots$ contenue dans la précédente et une fonction w, telles que

$$\int (wp)^2 dp \leqq H^2$$

et aussi

$$\lim_{n=\infty} \int (fp)(v_n p)\, dp = \int (fp)(wp)\, dp,$$

quelle que soit la fonction f, pourvu qu'elle soit intégrable au carré. La fonction w est appelée *fonction quasi-limite* des v. »

En se fondant sur ce théorème, l'auteur démontre l'existence d'une fonction φ rendant minimum ou maximum l'expression

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x_1 \ldots x_r)(\varphi x_1) \ldots (\varphi x_r)\, dx_1 \ldots dx_r.$$

et d'une rendant maximum l'expression

$$\sum_1^n \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_i(x_1 \ldots x_{2i})(\varphi x_1) \ldots (\varphi_{2i})\, dx_1 \ldots dx_{2i},$$

avec la condition

$$\int_0^1 (\varphi x)\, dx = 1.$$

De là il tire comme conséquence l'existence d'une solution pour les équations

$$\lambda \varphi x + \int_0^1 \ldots \int_0^1 F(x, y_1 \ldots y_r)(\varphi y_1) \ldots (\varphi y_r)\, dy_1 \ldots dy_r = 0,$$

$$\lambda \varphi x + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_i(x, y_1 \ldots y_{2i-1})(\varphi y_1) \ldots (\varphi y_{2i-1})\, dy_1 \ldots dy_{2i-1} = 0.$$

Albenga (*G.*). — [T 2] Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente [Sur la poutre continue infléchie et sollicitée axialement] (987-990).

2ème Partie

Rosati (*C.*). — [M, 2*e*] Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica [Sur les correspondances plurivalentes entre les points d'une courbe algébrique] (991-1014).

M. Hurwitz (*Math. Ann.*, t. XXVIII, 1886) a associé à toute correspondance T entre les points d'une courbe C de genre p, $4p^2$ nombres entiers

$$h_{ik},\ g_{ik},\ \mathrm{H}_{ik},\ \mathrm{G}_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ \ldots,\ p),$$

appelés les *nombres caractéristiques* de la correspondance. Entre ces nombres et les périodes normales de la courbe il y a p^2 relations, dont M. Rosati (*Ann. di Mat.*, t. XXV, 1915) a donné une interprétation géométrique en considérant, dans un S_{2p-1}, l'homographie rationnelle Ω ayant pour module le déterminant

$$\begin{vmatrix} h_{ik} & \mathrm{H}_{ik} \\ g_{ik} & \mathrm{H}_{ik} \end{vmatrix}.$$

Il a trouvé que ces relations expriment que Ω transforme en lui-même un S_{p-1} imaginaire déterminé dans S_{2p-1} par les périodes normales de C. En employant cette interprétation, il introduit maintenant la considération de l'*équation minimum* à laquelle satisfait une correspondance, c'est-à-dire l'équation qui dérive de l'ensemble minimum, formé par des puissances de T, qui donne naissance à une correspondance à *valence* nulle. Une racine rationnelle de l'équation minimum est nécessairement entière, et si γ est une telle racine, il y a sur C un système régulier réductible, par rapport auquel la correspondance T a la valence $-\gamma$. Les correspondances dont les équations minima ont toutes les racines rationnelles sont les correspondances *plurivalentes*, pour lesquelles l'auteur trouve la formule donnant le nombre des coïncidences.

Enfin, il montre comment on peut construire des courbes sur lesquelles il y a des correspondances à autant de valences que l'on veut.

Jadanza (*V.*). — [V 9] Ignazio Porro. Notizie biografiche (avec portrait) (1077-1093).

Voir les notes illustratives à la page 1255.

Boccardi (*G.*). — [J 2] Questioni di probabilità [Questions de probabilité] (1139-1152).

Particulièrement sur le problème n° 2 à la page 2 du *Calcul des probabilités* de Bertrand.

Tanturri (*A.*). — [I 1] Radici di numeri approssimati ed estrazione abbreviata della radice quadrata [Racines de nombres approchés et extraction abrégée de la racine carrée] (1153-1174).

Della Casa (*L.*). — [125] Rapporto di grandezze eterogenee [Rapport de grandeurs hétérogènes] (1175-1196).

Cicconetti (*G.*). — Strumenti diottrici ad obbiettivo composto usati in Geometria pratica [Instruments dioptriques employés en Géométrie pratique]. Note I (1197-1213). Note II (1271-1309).

Jadanza (*N.*). — [V 9] Note illustrative alla biografia di Ignazio Porro [Notes illustratives à la biographie de I. Porro (1255-1270).

Avec la liste des publications. La biographie se trouve à la page 1077.

Somigliana (*C.*). — [T2 ref. R5c] Sulle discontinuità dei potenziali elastici [Sur les discontinuités des potentiels élastiques] (1330-1352).

Au moyen des propriétés des potentiels newtoniens, on trouve celles des potentiels biharmoniques et de leurs dérivées.

Toutes les dérivées premières et secondes des potentiels biharmoniques de surface sont continues à travers la surface. Soit

$$V = \int hr\, ds$$

le potentiel en question. En supposant que l'axe z ait la direction de la normale et que les axes x, y soient tangents aux lignes de courbure, on trouve que, des troisièmes dérivées, la seule $\frac{\partial^3 V}{\partial z^3}$ est discontinue et que le saut correspondant est $-8\pi h$.

Soit

$$U = \int Kr\, dS$$

un potentiel biharmonique d'espace. Ces potentiels et leurs dérivées premières, secondes et troisièmes, sont continus à travers la surface.

Les potentiels biharmoniques de double couche

$$W = \int g \frac{\partial r}{\partial n}\, ds$$

ont cinq des dix troisièmes dérivées continues, en supposant les axes orientés comme ci-dessus. Les cinq autres,

$$\frac{\partial^3 W}{\partial z^3},\quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^2\, \partial y},\quad \frac{\partial^3 W}{\partial x\, \partial z^2},\quad \frac{\partial^3 W}{\partial y^2\, \partial z},\quad \frac{\partial^3 W}{\partial y\, \partial z^2},$$

ont respectivement les sauts

$$-8\pi\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)g,\quad \frac{8\pi}{R_1}g,\quad 8\pi\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{8\pi}{R_2}g,\quad 8\pi\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Les composantes u, v, w du déplacement élastique peuvent se mettre sous une forme dépendant des dérivées secondes de trois potentiels biharmoniques et des dérivées premières de quatre potentiels newtoniens. Les résultats précédents servent par cela à trouver les discontinuités de u, v, w et aussi des composantes de déformation et de tension. Cette étude est faite en décomposant la déformation générale en quatre types de déformations, étudiées séparément. Les résultats obtenus conduisent aussi à une interprétation mécanique des formules intégrales de représentation, et comme conclusion on a que :

Toute déformation est la superposition de trois déformations produites respectivement : 1° par un système de forces de masse agissant dans l'espace du corps; 2° par des forces superficielles agissant à la surface; 3° par une *distorsion*, obtenue en faisant une coupure dans la surface du corps et en effectuant aux points de cette coupure des déplacements relatifs égaux aux valeurs superficielles du déplacement.

T. LII. 1916-1917.

Panetti (*M.*). — [R 1 *f*] Rendimento dei rotismi epicicloïdali con un asse principale fisso [Rendement des rouages épicycloïdaux avec un axe principal fixe] (6-28).

Insolera (*F.*). — [J 2 *d*] Su una relazione fra l'annualità vitalizia di gruppo e l'annualità semplice nell' ipotesi di Makeham [Sur une relation entre l'annualité viagère de groupe et l'annualité simple dans l'hypothèse de Makeham] (55-66).

Sannia (*G.*). — [D 2] Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie [Nouvelle tractation de la méthode de Borel pour la sommation des séries] (67-86).

Afin qu'à une série on puisse appliquer le théorème de Cauchy sur le produit, il n'est pas nécessaire de lui imposer toutes les conditions indiquées par Borel, et il suffit de l'unique condition que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}u'(x)\,dx$$

soit simplement convergente.

Guidi (*C.*). — [T 2] Sollecitazioni nell' armatura dell' ala di un biplano in linea di volo, prodotte del sostegno dell' aria [Actions

dans l'armure de l'aide d'un biplan en ligne de vol, produites par l'appui de l'air] (87-96).

Sibirani (*F.*). — [R 5*a*] Intorno ad un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi [Sur un problème analogue au problème restreint des trois corps] (135-161).

Un point P_1 attire un point P_2 et P_2 repousse P_1 avec une force proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle aux carrés des distances. Si la masse de P_2 est moindre que celle de P_1, et sous certaines conditions, les points P_1, P_2 tournent autour d'un point fixe O. Un point P de masse telle que l'on puisse négliger son action sur P_1 et P_2 se meut sous l'action de P_1 et de P_2. Les positions d'équilibre relatif de P par rapport au mouvement de rotation de P_1 et de P_2 sont appelées les *centres de libration*. Il y en a cinq, et l'auteur étudie les mouvements qui maintiennent P dans le voisinage d'un centre de libration.

Jadanza (*N.*). — [U 10] Sul calcolo della distanza tra due punti di note posizioni geografiche [Sur le calcul de la distance entre deux points dont on connaît les positions géographiques] (211-255).

Peano (*G.*). — [I 1] Valori decimali abreviati e arrotondati [Valeurs décimales abrégées et arrondies] (372-382).

Comparaison entre le cas où l'on néglige les chiffres successifs à un chiffre déterminé et celui où l'on prend ce chiffre augmenté s'il y en a lieu. Influence des deux méthodes sur les opérations.

Picone (*M.*). — [S 6*b*] Formole razionali per la correzione del tiro [Formules rationnelles pour la correction du tir] (430-449).

Jadanza (*N.*). — [X 2] Per una edizione nazionale di tavole di logaritmi [Pour une édition nationale de tables de logarithmes] (450-452).

Peano (*G.*). — [I 1] Approssimazioni numeriche [Approximations numériques]. Note I (453-468). Note II (513-528).

Jadanza (*N.*). — [T 3*a*] Teoria elementare del cannocchiale terrestre accorciato [Théorie élémentaire de la lunette terrestre accourcie] (507-512).

Togliatti (*E.-G.*). — [P 2 ref. Q 2] Sui fasci di reciprocità degeneri tra spazi ad *n* dimensioni [Sur les faisceaux de réciprocités dégénérées entre des espaces de *n* dimensions] (628-643).

Burzio (*F.*). — [S 6 *b*] Una soluzione del problema della stabilita dei projetti [Une solution du problème de la stabilité des projectiles] (663-676, une planche).

Togliatti (*E.-G.*). — [P 2 ref Q 2]. Su alcune classi di sistemi lineari di reciprocità degeneri tre spazi ad *n* dimensioni [Sur certaines classes de systèmes linéaires de réciprocités dégénérées entre des espaces de *n* dimensions] (759-768).

Burali-Forti (*C.*). — [O] Equivalenti omografiche delle formule di Frenet. Linee e superficie parallele [Équivalentes homographiques des formules de Frenet. Lignes et surfaces parallèles] (834-846).

Application des homographies vectorielles.

Frisone (*R.*). — [N 2] Una teoria semplice dei logaritmi [Une théorie simple des logarithmes] (846-853).

Capetti (*A.*). — [T 2] Contributo allo studio dell' equilibramento delle masse rotanti [Contribution à l'étude de l'équilibrement des masses tournantes]. Note I (886-894). Note II (962-966).

Albenga (*G.*). — [T 2] Sulla trave continua inflessa e sollecitata assialmente [Sur la poutre continue infléchie et sollicitée axialement] (895-901).

Une première Note est dans le Tome LI, à la page 987.

Tanturri (*A.*). — [I 10] Della partizione dei numeri. Ambi, terni, quaterne e cinquine di data somma [Sur la partition des nombres. Groupes de deux, trois, quatre et cinq nombres de somme donnée] (902-918).

Burzio (*F.*). — [S 6*b*] Formole razionali per il calcolo della derivazione dei proietti [Formules rationnelles pour le calcul de la dérivation des projectiles] (919-930, avec une planche).

Albenga (*G.*). — [R 9*a*] Sull' attrito volvente nei veicoli ordinari [Sur le frottement de rotation dans les véhicules ordinaires] (996-1001).

Rossi (*A.-G.*). — [T 7*c*] Un trasformatore dinamico per correnti alternate [Un transformateur dynamique pour courants alternés] (1002-1013).

T. LIII, 1917-1918.

Rosati (*C.*). — [M 2] Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica [Sur les valences des correspondances algébriques entre les points d'une courbe algébrique] (5-22).

Sur une courbe C de genre p, soit une correspondance (n, ν) et soit T l'opération par laquelle on passe d'un point x aux ν points homologues y, et T^{-1} l'opération inverse. Soient σ un cycle de x sur la surface de Riemann R, image de C, et σ' le cycle homologue de σ pour l'opération T; on suppose que l'on ait la relation

$$\tau' + \gamma\tau = 0$$

entre les périodes τ, τ' d'une intégrale de première espèce u suivant les cycles σ et σ', γ étant un nombre réel ou complexe indépendant du cycle σ. Alors la somme

$$u(y') + \ldots + u(y^{\nu}) + \gamma u(x)$$

est une constante. En indiquant par I l'identité, on dit que la fonction linéaire de T,

$$T + \gamma I,$$

est de *niveau* constant pour l'intégrale u, ou bien que γ est une *valence* de T par rapport à u. Les intégrales par rapport auxquelles l'opération T a une valence γ forment un système linéaire que l'on dit *associé* à cette valence.

Cette notion de valence avait été introduite par l'auteur dans sa Note du Tome LI (p. 991) de ces *Atti*. Ici, après avoir donné de la valence la définition plus générale que nous avons reporté, il démontre que deux correspondances T, T^{-1} ont des valences imaginaires conjuguées; et que la condition pour que T soit symétrique est que ses valences soient toutes réelles et que chacune de celles-ci soit, pour T et pour T^{-1}, associée au même système linéaire d'inté-

grales. Pour que T soit hémisymétrique, la condition est que ses valences soient imaginaires pures.

Enfin il démontre que, sur une courbe dépourvue de systèmes réguliers réductibles, toute correspondance est telle que les systèmes linéaires d'intégrales de première espèce associées à ses valences appartiennent au système total $\varkappa^p$ [1].

Pensa (*A.*). — [B 12] Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici C, R [Sur certaines homographies spéciales et sur les opérateurs homographiques C, R] (23-36).

Guidi (*C.*). — [T 2] Sulle deformazioni delle dighe a volta [Sur les déformations des digues à voûte] (37-46).

Pensa (*A.*). — [B 12] Sull' operatore omografico R' [Sur l'opérateur homographique R'] (81-93).

Grassi (*G.*). — [S 4*b*] A proposito di due Note del prof. Guglielmo « Sulla legge di Poisson e sull' esperienza di Clément e Desormes » [A propos de deux Notes de M. le professeur Guglielmo et sur l'expérience de Clément et Desormes] (94-106).

Burali-Forti (*C.*). — [O 5*e*] Alcuni sistemi di linee su di una superficie [Sur certains systèmes de lignes sur une surface] (111-123).

Boverio (*E.*). — [S 3] Sopra la derivazione dei canali [Sur la dérivation des canaux] (124-134).

Sannia (*G.*). — [D 2*a*] Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato [Les séries de puissances d'une variable, sommées par la méthode de Borel généralisée] (135-148).

La généralisation de la méthode de Borel a été donnée par l'auteur dans un Mémoire qui sera inséré aux *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, lorsque ceux-ci reprendront leur publication. Un résumé se trouve dans les *Rendiconti des Lincei*, t. XXV (5e série).

Guidi (*C.*). — [T 2] Sul calcolo dell' arco elastico senza cerniere [Sur le calcul de l'arc élastique sans charnières] (149-154).

Rossi (*A.-G.*). — [T 7*c*] Un trasformatore dinamico per correnti alternate [Un transformateur dynamique pour courants alternés]. Note IV (155-164).

Mori-Breda (*G.*). — [I 1] Estrazione graduale delle radice quadrata [Extraction graduelle de la racine carrée] (225-236).

Stranco (*P.*). — [T 1*a*] Relazioni generale fra teorie fisiche e costanti universali [Relations générales entre les théories physiques et les constantes universelles] (245-264).

Les dimensions des constantes universelles d'une théorie ne peuvent, en général, être données arbitrairement; le lieu auquel elles sont assujetties est caractéristique pour la théorie et l'on peut en général en déduire les traits fondamentaux de la théorie.

Burali-Forti (*C.*). — [O 3] Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale [Courbe en tout point de laquelle est donnée une direction liée invariablement au trièdre principal] (347-358).

Frisone (*R.*). — [V 1*a*] Le varie definizioni di prodotto [Sur les diverses définitions du produit] (420-427)

Lagneau (Le capitaine). — [V 1*a*] Logique des propositions (en français) (428-444).

Rossi (*A.-G.*). — [T 7*c*] Un trasformatore dinamico per correnti alternate [Un transformateur dynamique pour courants alternés]. Note V (509-518).

Burzio (*F.*). — [S 6*b*] Sopra alcune formule del Mayevski relative al 2° problema balistico fondamentale [Sur quelques formules de Mayevski, relatives au second problème balistique fondamental] (603-607).

Somigliana (*C.*). — Sulle onde di Rayleigh [Sur les ondes de Rayleigh] (618-628).

Soient

$$s = Lx + My + Nz = \text{const.}$$

les plans d'onde (L, M, N des constantes), u, v, w les composantes d'un vecteur vibrant de direction fixe; on doit avoir

$$u = A\varphi(s, t), \qquad v = B\varphi(s, t), \qquad w = C\varphi(s, t)$$

avec A, B, C constantes.

Ayant posé

$$L^2 + M^2 + N^2 = \Delta,$$

et λ, μ étant les constantes de Lamé et ρ la densité, les valeurs de la vitesse de propagation sont

$$p_1 = \sqrt{\frac{\mu\Delta}{\rho}}, \qquad p_2 = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)\Delta}{\rho}}.$$

Dans le premier cas les ondes sont transversales, dans le second elles sont longitudinales.

En supposant L, M, N complexes

$$L = l + i\alpha, \qquad M = m + i\beta, \qquad N = n + i\gamma,$$

le cas des ondes transversales conduit à des ondes que l'auteur appelle *rectilignes* et dont celles de Rayleigh sont un cas particulier (celui où les directions l, m, n et α, β, γ sont orthogonales.

Jadanza (*N.*). — [V 9] Cenni necrologici su Paolo Pizzetti [Notice nécrologique de P. Pizzetti] (671-676).

Avec la liste des travaux.

Peano (*G.*). — [X 2] Interpolazione nelle tavole numeriche [Interpolation dans les tables numériques] (693-716).

Bottasso (*M.*). — [O 3*i*] Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve [Généralisation de la transformation de Combescure pour les courbes] (717-730).

Pincherle (*S.*). — [I 4] Sulle catene di radicali quadratici [Sur les chaînes de radicaux quadratiques] (745-763).

Gerbaldi (*F.*). — [D 2 ref. F 3*da*) Simmetria e periodicità nelle frazioni continue di Halphen [Symétrie et périodicité dans les fractions continues d'Halphen] (767-784). Note II (869-887).

Tanturri (*A.*). — [D 2*c*] Sui prodotti infiniti

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots \quad \text{e} \quad (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$$

[Sur les produits infinis

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots \quad \text{et} \quad (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$$

(785-792).

Burzio (*F.*). — [S 6*b*) La 2ª approssimazione della soluzione del 2º problema balistico [La deuxième approximation de la solution du second problème balistique] (888-895).

Scorza (*G.*). — [G 3] Sopra alcune notevoli matrici riemanniane [Sur certaines matrices riemanniennes remarquables] (1008-1017).

La théorie générale des matrices riemanniennes a été faite par l'auteur dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (t. XLI, 1916, p. 263-379). Ici il traite le cas suivant :

Soit

$$a_0 x^{2p} + \ldots + a_{2p} = 0$$

une équation de degré $2p$ à coefficients entiers, dépourvue de racines multiples, à racines toutes imaginaires et ayant toutes pour module le carré d'un même nombre rationnel σ. Alors, si

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

sont p racines distinctes de cette équation, dont deux quelconques ne soient pas imaginaires conjuguées, la matrice

$$\omega = \| 1, \alpha_j, \alpha_j^2, \ldots, \alpha_j^{2p-1} \| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

est une matrice riemannienne de genre p pour laquelle on a

$$k = p - 1, \qquad h = 2p - 1,$$

k et h étant les indices de *singularité* et de *multiplicabilité*.

Laura (*E.*). — [T2] Sopra i moti quasi liberi di un fluido elastico [Sur les mouvements quasi libres d'un fluide élastique] (1018-1024).

Ces mouvements sont ou périodiques ou bien apériodiques à type amoindri.

Fubini (*G.*). — [C 4] Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie [Fondements de la géométrie projectivo-différentielle d'une surface] (1032-1043).

En prenant comme élément linéaire une forme quadratique, considérée par lui dans deux Notes insérées aux *Rendiconti dei Lincei*, l'auteur réussit à construire une géométrie métrique invariante par collinéations et à étendre les notions de courbure, etc.

Quarra (*P.*). — [I 1] Calcolo delle parentesi [Calcul des parenthèses] (1044-1047).

En combien de manières peut-on exécuter la somme (ou le produit) de n nombres dont l'ordre est fixé ?

Viriglio (*L.*). — [I 1] Estrazione graduale della radice cubica [Extraction graduelle de la racine cubique] (1067-1078).

T. LIV, 1918-1919.

Fubini (*G.*). — [C 4*a*] I differenziali covarianti [Les différentiels covariants] (5-7).

Cicconetti (*G.*). — [T 3*a*] Sulle determinazione dell' ingrandimento di un cannocchiale col dinametro [Sur la détermination du grossissement d'une lunette au moyen du dynamètre] (8-12).

Boccardi (*G.*). — [A 5] Su di un problema d'interpolazione [Sur un problème d'interpolation] (13-22).

Comi (*T.-T.*). — [I 1] Formole sommatorie [Formules de somme] (23-38).

Colonnetti (*G.*). — [T 2] Applicazioni a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche [Applications à des problèmes techniques d'un nouveau théorème sur les coactions élastiques] (69-83).

Destefanis (*M.*). — [I 1] Estrazione della radice quadrata [Extraction de la racine carrée] (84-96).

Tanturri (*A.*). — [I 10] Sul numero delle partizioni di un numero in potenze di 2 [Sur le nombre des partitions d'un nombre en puissances de 2] (97-110).

Sibirani (*F.*). — [R 5*a*] Ulteriori ricerche intorno ad un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi [Recherches ultérieures sur un problème analogue au problème restreint des trois corps] (111-121).

Del Re (*A.*). — [Q 2] Sul carattere invariantivo di certi operatori nella analisi estensiva ad *n* dimensioni [Sur le caractère invariant de certains opérateurs dans l'analyse extensive à *n* dimensions] (156-170).

Il faut voir sur cela les Notes de l'auteur, publiées dans les *Rendiconti della R. Acc. di Napoli*, 1916; *Rendiconti dei Lincei*, 1916, 1917 et 1918; *Rendiconti dell' Istituto Lombardo*, 1917.

Sannia (*G.*). — [D 2*a*] Serie di funzioni, sommabili uniformemente col metodo di Borel generalizzato [Séries de fonctions, sommables uniformément par la méthode de Borel généralisée] (171-185).

Boggio (*T.*). — [Q 1, 2] Sulla geometria assoluta degli spazi curvi [Sur la géométrie absolue des espaces courbes] (186-200).

Lazzarino (*O.*). — [R 8*a*] Sulla generalizzazione dei moti alla Poinsot e sulla stabilità degli assi permanenti di rotazione in detti moti [Sur la généralisation des mouvements de Poinsot et

sur la stabilité des axes permanents de rotation en ces mouvements] (201-219).

Sannia (*G.*). — [D2*a*] Le serie di Dirichlet sommate col metodo di Borel generalizzato [Les séries de Dirichlet sommées par la méthode de Borel généralisée] (315-323).

Raciti (*C.*). — [Q2 ref. $M_2$8] Sopra una classe di varietà abeliane a tre dimensioni [Sur une classe de variétés abéliennes à trois dimensions] (443-449).

Variétés admettant une transformation birationnelle périodique, représentée analytiquement par une substitution linéaire sur les paramètres, ayant pour multiplicateurs trois racines de l'unité distinctes et appartenant toutes à un même exposant.

Tanturri (*A.*). — [I11] Sulla funzione di Dirichlet e sulla funzione *signum x* del Kronecker [Sur la fonction de Dirichlet et sur la fonction *signum x* de Kronecker] (450-457).

Mori-Breda (*G.*). — [I1] Sviluppo delle radici in prodotto decimale [Développement des racines en produit décimal] (533-542).

Comi (*T.T.*). — [I1] Sviluppo delle radici in prodotto decimale [Développement des racines en produit décimal] (543-548).

Maiorana (*O.*). — [R5*a*] Nuove ipotesi cosmogoniche e nuovo fenomeno gravitazionale [Nouvelles hypothèses cosmogoniques et nouveau phénomène de gravitation] (667-669).

Il paraît que 100^{kg} de mercure distribués symétriquement autour de 1^{kg} de plomb produisent sur celui-ci une augmentation de poids de 3.10^{-7}.

Peano (*G.*). — [A3*g*] Risoluzione graduale delle equazioni numeriche [Résolution graduelle des équations numériques] (795-807).

Albenga (*G.*). — [T2] Sul problema delle coazioni elastiche [Sur le problème des coactions élastiques] (864-868).

Somigliana (*C.*). — [T 3*a*] Sulle relazioni fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica [Sur les relations entre le principe de Huygens et l'optique géométrique] (974-979).

Pour que l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi$$

ait une intégrale pour laquelle les surfaces $\varphi =$ const. soient en tout instant des surfaces parallèles, cette série doit être formée par des surfaces à courbure moyenne constante.

Zavagna (*I.*). — [X 2] Calcolo dei logaritmi naturali con la serie esponenziale [Calcul des logarithmes naturels au moyen de la série exponentielle] (1001-1012).

T. LV, 1919-1920.

Picone (*M.*). — [C 2] Sul cambiamento della variabile d'integrazione nell' integrale di Lebesgue [Sur le changement de la variable d'intégration dans l'intégrale de Lebesgue] (31-45).

Sibirani (*F.*). — [D 4*ea*] Espressioni analitiche che definiscono più funzioni analitiche ad area lacunare [Expressions analytiques définissant plusieurs fonctions analytiques à espaces lacunaires] (46-50).

Brusotti (*L.*). — [B 7*b*] Sulla scomposizione di una forma binaria biquadratica nella somma di due quadrati [Sur la décomposition d'une forme binaire biquadratique en somme de deux carrés] (63-68).

Maiorana (*Q.*). — [R 5*a*] Sur la gravitation (69-88).

La force de gravitation est peut-être diminuée par une absorption de la part de la matière.

Zanotti-Bianco (*O.*). — [U 10*a*] I concetti moderni sulla figura matematica della terra. Appunti per la storia delle Geodesia. Nota IX. Il divario fra l'ellissoide e la terra fluida [Les vues

modernes sur la figure mathématique de la Terre. Note IXe. La différence entre l'ellipsoïde et la Terre fluide] (158-171).

Jadanza (*N.*). — [V 9] Commemorazione del Socio corrispondente prof. Vincenzo Reina. [Commémoration du membre correspondant professeur V. Reina] (254-258).

Avec la liste des travaux.

Gerbaldi (*F.*). — [B 7 *b*] Sulla scomposizione di una forma binaria biquadratica nella somma di due quadrati [Sur la décomposition d'une forme binaire biquadratique en somme de deux carrés] (259-268).

Sannia (*G.*). — [D 2 *a*] Serie di funzioni sommabili uniformemente col metodo di Borel generalizzato [Séries de fonctions sommables uniformément par la méthode de Borel généralisée]. Note II (310-322).

Segre (*C.*). — [V 9] H.-G. Zeuthen. Commémoration (327-328).

Colonnetti (*G.*). — [R 4] Risoluzione grafica di alcuni problemi relativi all' equilibrio delle funi pesanti [Résolution graphique de quelques problèmes relatifs à l'équilibre des cordes pesantes] (345-352).

Sesini (*O.*). — [T 2] Le oscillazioni torsionali degli alberi di trasmissione, con massa propia e con masse concentrate in punti intermedi [Les oscillations de torsion des arbres de transmission avec masse propre et avec des masses concentrées en des points intermédiaires] (365-375).

Terracini (*A.*). — [Q 2] Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà [Quelques questions relatives aux espaces tangents et osculateurs à une variété] (480-500).

Panetti (*M.*). — [V 9] Note autobiografiche di N. Jadanza [Notes autobiographiques de N. Jadanza] (633-649).

Avec la liste des travaux.

SCIPIONE RINDI.

RENDICONTO DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE.

(Classe della Società reale di Napoli.)

Série III, vol. XXII à XXVI, 1916-1920.

Vol. XXII, 1916, fascicules 7-12.

Del Re (*A.*). — Gli hamiltoniani ed i gradienti nell'Analisi generale ad *n* dimensioni di Grassmann (Les hamiltoniens et gradients dans l'Analyse générale à *n* dimensions de Grassmann) (99-106).

Hamiltoniani e gradienti rispetto a formazioni non interamente libere (Hamiltoniens et gradients par rapport à des formes non entièrement libres (139-143).

L'auteur étudie, de façon très complète, comment on peut généraliser, dans le cas de *n* dimensions, la définition de ces opérateurs.

Vol. XXIII, 1917.

Pascal (*Ernesto*). — Su di un derivatore polare da servire nella radiotelegrafia (Sur un dérivateur polaire pouvant servir dans la radiotélégraphie) (59-62).

Basé sur la propriété de la sous-normale polaire.

Pascal (*Ernesto*). — L'integrazione doppia nel campo complesso (L'intégration double dans le champ complexe) (63-66).

Il teorema di Cauchy-Morera esteso agli integrali doppii delle funzioni di variabili complesse (Le théorème de Cauchy-Morera étendu aux intégrales doubles des fonctions de variables complexes) (73-78).

Intéressante exposition, en suivant une méthode différente, des résultats classiques de Poincaré sur cette question.

Cipolla (*Michele*). — Sulle serie semplicemente convergenti (Sur les séries simplement convergentes) (88-94).

Parmi les résultats de l'auteur nous citerons les suivants : si le terme général d'une série tend vers zéro, l'ensemble des points limites comprend un point ou un intervalle; en modifiant l'ordre des termes d'une série simplement convergente on peut obtenir ainsi un intervalle assigné quelconque.

Amato (*Vincenzo*). — Sui gruppi finiti di tipo 4 (Sur les groupes finis de type 4) (107-113).

Le type d'un groupe étant k s'il y a $k+2$ sous-groupes fondamentaux, M. Amato montre que tous les groupes de type 4 sont de rang 1.

Scorza (*Gaetano*). — Sulle serie col termine generale convergente a zero (Sur les séries dont le terme général tend vers zéro) (114-121).

De propriétés générales des ensembles l'auteur déduit l'extension, dans le cas d'une série à termes imaginaires, du premier des résultats précédemment cités de M. Cipolla.

Vol. XXIV, 1918.

Montesano (*Domenico*). — Le corrispondenze birazionali piane emmisimmetriche (Les correspondances birationnelles planes hémisymétriques) (31-78).

Une correspondance birationnelle entre deux plans est dite hémisymétrique si, dans chacun des plans, elle présente seulement deux groupes de points fondamentaux, constitués chacun de points d'égale multiplicité. Détermination de tous les types de telles correspondances; propriétés fondamentales.

Morales (*Adele*). — Sopra un teorema di Poisson nel calcolo delle probabilità (Sur un théorème de Poisson dans le calcul des probabilités (83-94).

Il s'agit du cas où, dans une série d'épreuves, la probabilité d'un événement E n'est pas la même à chaque épreuve. On connaît la formule approchée de Poisson pour la probabilité d'un écart compris entre des limites fixées. L'auteur, rectifiant et complétant un calcul de Laurent, donne une évaluation du reste de cette formule, plus simple que celle donnée par Liapounoff.

Torelli (*Gabriele*). — Determinazione dei numeri primi nella progressione aritmetica (Détermination des nombres premiers dans la progression arithmétique) (116-120).

Détermination du $n^{\text{ième}}$ parmi les nombres premiers qui figurent dans une progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux.

Amato (*V.*). — Sui gruppi di rango 2, d'ordine minimo (Sur les groupes de rang 2, d'ordre minimum) (121-131).

Ils sont holoédriquement isomorphes au groupe des substitutions de quatre éléments.

Brunelli (*P.-E.*). — Sulla velocità critica di un albero rotante, in un caso non peranco posto a calcolo (Sur la vitesse critique d'un arbre tournant, dans un cas pas encore traité par le calcul) (132-135).

Amato (*V.*). — Sul tipo minimo dei gruppi di rango 2 (Sur le type minimum des groupes de rang 2) (136-144).

Les groupes de type 5 et 6 sont aussi de rang 1. Exemple d'un groupe de type 7 et de rang 2.

Vol. XXV, 1919.

Pascal (*Ernesto*). — Un teorema sui determinanti di ordine pari (Un théorème sur les déterminants d'ordre pair) (36-39).

L'auteur établit le théorème suivant : Tout déterminant d'ordre pair peut être mis sous forme d'un pfaffien. Notons que ce résultat, attribué ici à Saalschütz, remonte à Brioschi.

Andreoli (*Giulio*). — Sulla derivazione applicata iteratamente a funzioni analitiche (Sur la dérivation réitérée des fonctions analytiques) (39-48).

M. Vitali avait indiqué la forme nécessaire et suffisante d'une fonction analytique $f(z)$, pour que sa dérivée $n^{\text{ième}}$ ait une limite pour n infini. L'auteur généralise cette recherche, étudiant complètement le cas où il y a, non pas une, mais p limites et le cas où n tend vers l'infini en prenant seulement une suite déterminée de valeurs.

Trapani (*Emma*). — Calcolo del moto medio asintotico della longitudine del nodo lunare (Calcul du mouvement moyen asymptotique du nœud lunaire) (49-69).

Calcul dépendant d'une équation du type Gyldén, analogue à celle que l'on considère dans la théorie de la longitude de la Lune.

Pascal (*Mario*). — Le funzioni monogene di linee complesse (Les fonctions monogènes de lignes complexes) (69-77).

L'auteur obtient les conditions de monogénéité pour une ligne complexe fonction d'une ligne complexe; il établit l'équation qui, dans cette théorie, jouera le rôle que joue l'équation de Laplace dans la théorie classique des fonctions de variable complexe.

Andreoli (*Giulio*). — Sull'iterazione di operatori differenziali lineari (Sur l'itération d'opérateurs différentiels linéaires) (77-86).

Suite de la Note précédente; étude des fonctions pour lesquelles existe la limite

$$\lim_{n=\infty} \Theta^n \varphi \quad \left(\Theta\varphi = \alpha_0 \varphi + \alpha_1 \frac{d\varphi}{dz} + \ldots + \alpha_m \frac{d^m \varphi}{dz^m};\ \alpha_i \text{ constantes}\right).$$

Pascal (*Mario*). — Il teorema e la formola di Cauchy per le funzioni monogene di linee complesse (Le théorème et la formule de Cauchy pour les fonctions monogènes de lignes complexes) (87-95).

Très complète extension, aux fonctions de lignes envisagées par l'auteur dans sa Note précédente, des théorèmes et formules qui sont à la base de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Sannia (*Gustavo*). — Sviluppo di una funzione analitica in serie sommabili col metodo di Borel (Développement d'une fonction analytique en séries sommables par la méthode de Borel) (125-137).

Un théorème sur l'intégration terme à terme, le long d'une ligne rectifiable, d'une série uniformément sommable de fonctions de deux variables complexes. Applications diverses; notons surtout celles à la formule de Lagrange et aux séries de polynomes de Painlevé.

Andreoli (*Gustavo*). — Sistemi differenziali ad una variabile generalizzanti l'equazione di Riccati (Systèmes différentiels à une variable généralisant l'équation de Riccati) (154-162).

Généralisation obtenue en partant d'un système de $n+1$ équations linéaires et homogènes et en formant le système que vérifient les rapports de n fonctions inconnues à la $(n+1)^{\text{ième}}$.

Vol XXVI, 1920, fascicules 1-6.

Montesano (*D.*). — Su la teoria delle congruenze lineari di coniche nello spazio (Sur la théorie des congruences linéaires de coniques dans l'espace) (60-68).

Exposé de résultats déjà anciens de l'auteur sur la détermination des divers types de ces congruences. Critiques d'objections faites par Godeaux et S. Kantor.

Andreoli (*Giulio*). — Sopra alcune proprietà di certi sistemi differenziali generalizzanti l'equazione di Riccati (Sur quelques propriétés de certains systèmes différentiels généralisant l'équation de Riccati) (66-77).

Dans sa Note précédente (1919), M. Andreoli a généralisé, pour les systèmes envisagés, la relation classique du rapport anharmonique constant entre quatre solutions de l'équation de Riccati. Il examine ici l'existence d'autres relations (indépendantes de la variable) entre systèmes de solutions.

Cipolla (*M.*). — Sul criterio di convergenza di Hardy (Sur le critère de convergence de Hardy) (96-107).

C'est le critère d'après lequel : étant donnée une suite $\{a_n\}$, telle que M_n (moyenne des n premiers termes) converge vers a, si l'on a

$$n|a_n - a_{n-1}| < k,$$

la suite convergera vers a. L'auteur en donne une démonstration très directe, dont il déduit d'autres critères plus généraux.

Picone (*Mauro*). — Sull'integrale di Riemann e sua relazione con l'integrale di Lebesgue (Sur l'intégrale de Riemann et sa relation avec l'intégrale de Lebesgue) (129-135).

Définition directe des intégrales par excès et par défaut d'une fonction définie sur un ensemble limité quelconque E. Leur expression comme intégrales (L) étendues à l'E' des points non extérieurs à E. Conséquences diverses.

Cipolla (*M.*). — Sul criterio di convergenza di Hardy (Sur le critère de convergence de Hardy) Note II (151-160).

Notables extensions des critères envisagés dans la première Note.

Tricomi (*Francesco*). — Sulle serie di funzioni di linee (Sur les séries de fonctions de lignes) (160-169).

Théorèmes sur leur continuité et dérivabilité.

Amodeo (*F.*). — Le ricerche di un matematico napoletano del settecento su alcuni teoremi di Archimedi e sulle loro estensioni (Recherches d'un mathématicien napolitain du XVIIIe siècle sur quelques théorèmes d'Archimède et leurs extensions) (170-177).

Pascal (*Mario*). — Gl'integrali n-upli nel campo complesso (Les intégrales n-uples dans le champ complexe) (183-192).

Généralisation du théorème de Cauchy-Morera pour les fonctions monogènes de n variables.

Tricomi (*Francesco*). — Le serie di potenze nel campo delle funzioni di linee (Les séries de puissances dans la théorie des fonctions de lignes) (193-202).

Pascal (*Mario*). — Sull'integrale multiplo di una forma differenziale (Sur l'intégrale multiple d'une forme différentielle) (203-210).

Conditions pour qu'elle ne dépende que de la frontière du domaine d'intégration. Application à l'extension du théorème de Cauchy-Morera.

JOSEPH PÉRÈS.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 171, 2e semestre 1920.

Sierpinski (*W.*). — Sur les ensembles mesurables B (24-26).

En adoptant pour ces ensembles la classification de M. Hausdorff, l'auteur démontre que toute transformation biunivoque et continue conserve la classe d'un ensemble mesurable B.

Cartan (*E.*). — Sur l'applicabilité projective des surfaces (27-29).

Dans une Note précédente (t. CLXX, 1920, p. 1439), l'auteur a étudié la déformation projective des surfaces non réglées; il ajoute ici tout d'abord quelques remarques complémentaires, puis il prend le cas des surfaces réglées qui donnent lieu aux résultats suivants : Toute surface réglée non développable admet une infinité de déformées dépendant d'une fonction arbitraire d'un

argument; deux surfaces dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire, deux surfaces développables, sont toujours applicables projectivement et la correspondance dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument. Dans l'hyperespace à $n > 3$ dimensions, les surfaces sont toutes projectivement indéformables, sauf les développables.

Fubini (*G.*). — Sur les surfaces projectivement applicables (88-89).

A la suite de la première Note de M. Cartan, citée ci-dessus, l'auteur fait remarquer que la méthode qu'il a indiquée permet de traiter le problème.

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Énumération des classes de représentations d'une surface sur une autre surface (89-91).

Soient deux surfaces π et ρ d'ordre de connexion fini; l'auteur étudie les classes de représentations uniformes et continues de π sur ρ, au sens de *l'Analysis situs*, en faisant intervenir des groupes de courbes continues fermées sur π et ρ; une classe de représentations donne lieu, entre ces groupes, à un système de formules de transformations que l'auteur appelle *image formelle* de la classe; à une image formelle correspond, suivant le cas : une, deux ou une infinité de classes.

Galbrun. — Sur l'application des équations de l'élasticité aux déformations d'un ressort en hélice (91-93).

On suppose ici la masse du ressort négligeable et les forces extérieures appliquées seulement aux extrémités; on ne conserve, dans la variations des paramètres, que les infiniment petits du premier ordre; le problème dépend alors d'une équation différentielle du quatrième ordre, linéaire et à coefficients constants, dont on peut discuter la solution suivant que le ressort est soumis à une traction ou à une compression.

Jouguet (*E.*). — Remarques sur la résistance des fluides (96-99).

Après quelques indications historiques, l'auteur montre le profit qu'on peut tirer dans cette théorie des considérations de similitude et d'homogénéité des formules.

Fubini (*G.*). — Sur les fonctions automorphes (156-157).

Rappel des travaux de l'auteur, à propos des *Leçons* publiées par M. Giraud sur ce sujet.

Rémoundos (*G.-J.*). — Sur le module et les zéros des fonctions analytiques (157-159).

L'auteur ajoute ici quelques résultats à ceux de sa dernière Note (t. CLXX,

1920, p. 1557); en particulier, il généralise le célèbre théorème de M. Picard par l'énoncé suivant : Une fonction analytique, ayant un nombre fini ν de branches dans le voisinage d'un point singulier transcendant isolé, prend dans ce voisinage toutes les valeurs, sauf 3ν au plus, l'infini compris. Il étend aussi un théorème de MM. Carathéodory et Landau sur les suites de fonctions holomorphes.

Petot (*A.*). — Sur la représentation sphérique des surfaces et la correspondance par plans tangents parallèles (159-161).

L'auteur établit d'abord trois formules générales d'où l'on tire facilement plusieurs propriétés connues des surfaces: il en déduit quatre expressions qui prennent la même valeur sur deux surfaces qui se correspondent par plans tangents parallèles, avec correspondance des coordonnées (u, v).

Humbert (*G.*). — Sur la représentation d'un entier par les formes d'Hermite indéfinies, dans un corps quadratique imaginaire (287-293).

L'auteur a déjà étudié les représentations propres par les formes positives d'Hermite, et obtenu à ce sujet une formule fondamentale (*voir* t. CLXIX, 1919, p. 314); la même voie le conduit à une formule analogue pour les formes indéfinies. L'application de cette formule à des cas particuliers donne des propositions importantes sur la représentation des entiers par certaines catégories de formes quadratiques.

Petot. — Extrait d'une lettre de M. Petot à M. Appell (336).

L'auteur indique une simplification qu'on peut apporter dans une formule de sa Note précédente (*voir* plus haut).

Delaunay (*B.*). — Sur le nombre des représentations d'un nombre par une forme cubique binaire à discriminant négatif (336-338).

En posant $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Ey^3 = (A, B, C, D)$, la résolution de $(A, B, C, D) = \sigma$ revient à celle d'équations de la forme $(1, n, -p, q) = 1$; l'auteur démontre que cette dernière n'a que deux solutions au plus, sauf dans quelques cas exceptionnels où elle peut en avoir trois ou quatre.

Carlson (*F.*). — Sur les zéros des séries de Dirichlet (339-341).

Soit une série de Dirichlet $f(s) = \Sigma a_n n^{-s}$; posons $s = \sigma + it$ et désignons par $N(\beta, \omega)$ le nombre de zéros de $f(s)$ dans la bande $0 < \sigma < \beta$, $|\tau| < \omega$. L'auteur démontre que l'on a : $N\left[\frac{1}{2} + k + \delta, \omega\right] < \omega^{1+\varepsilon-2\delta} + \omega^{1+\varepsilon-4\delta(k+\delta)}$, où

pour $\delta > 0$ fixe, $\lim \varepsilon = 0$ quand $\omega = \infty$. On en déduit en particulier que pour la série $\zeta(s)$ on a : $N\left(\frac{1}{2} + \delta, \omega\right) < \omega^{1+\varepsilon-4\delta^2}$ dans les mêmes conditions; cette inégalité, qui est plus avantageuse que celle de MM. Bohr et Landau, n'est donc pas une propriété spéciale à la fonction $\zeta(s)$.

Buhl (*A.*). — Sur les symétries du champ électromagnétique et gravifique (345-348).

L'auteur montre que le symbolisme qu'il a utilisé dans des Mémoires antérieurs sur les extensions et applications de la formule de Stockes, permet de mettre sous une forme très simple et très symétrique les formules données par M. de Donder dans son Ouvrage sur la *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein.*

Humbert (*G.*). — Expression de l'aire non-euclidienne du domaine fondamental lié à une forme d'Hermite indéfinie (377-382).

Soit une forme $f(x, y) = xx_0 - Dyy_0$ du corps $i\sqrt{P}$ ($P = 1$ ou 2, mod 4), D étant positif sans facteur premier impair (> 1) commun avec P et non multiple de 4; l'auteur obtient, pour l'aire en question, l'expression

$$A = \pi DP \prod_{\delta}\left[1 + \left(\frac{-P}{\delta}\right)\frac{1}{\delta}\right]\prod_{\omega}\left[1 + \left(\frac{D}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right],$$

où δ et ω désignent respectivement les diviseurs premiers impairs (> 1) de D et P.

Carleman (*T.*). — Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique (383-386).

Soit l'équation $\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x)$, où K est réel et symétrique et tel, en outre, que la fonction de x : $\int_a^b [K(x, y)]^2 dy$ soit bornée dans le plan des x, sauf en un nombre fini de points. L'auteur étudie les valeurs caractéristiques λ du noyau (nombres pour lesquels

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = 0$$

a une solution) et démontre que : ou bien les λ sont tous réels, ou bien tout nombre non réel est une valeur caractéristique.

2ème Partiel.

Galbrun. — Déformation d'un ressort en hélice dont les extrémités sont encastrées (386-389).

On suppose que les extrémités sont encastrées dans des pièces qui les obligent à rester sur une même génératrice du cylindre et empêchent la section du ressort de pivoter autour de son centre. Au moyen des formules de sa dernière Note, dans lesquelles certains termes peuvent être négligés, l'auteur détermine alors les expressions des composantes du déplacement de l'une des extrémités du ressort par rapport à l'autre.

Fredholm (I.). — Sur la réduction d'un problème de la Mécanique rationnelle à une équation intégrale linéaire (426-428).

Pour contribuer à réaliser une idée émise par Poincaré, l'auteur montre que le système d'équations différentielles

$$\frac{du_\alpha}{dt} = v_\alpha, \quad \frac{dv_\alpha}{dt} = X_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

peut se ramener à la résolution d'une équation intégrale linéaire de deuxième espèce.

Humbert (P.). — La fonction $W_{k,\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ (428-430).

L'auteur généralise la définition et les propriétés de la fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ qu'il a étudiée dans une Note antérieure (t. CLXX, 1920, p. 832); cette nouvelle fonction, comme la précédente, se présente comme un cas limite de la fonction hypergéométrique à n variables.

Humbert (G.). — Sur une liaison arithmétique entre les formes quadratiques ternaires réelles et les formes d'Hermite indéfinies (445-450).

L'auteur donne une nouvelle démonstration de la formule de l'aire obtenue dans sa Note précédente (*voir* plus haut), basée sur les propriétés de la forme quadratique ternaire indéfinie $Dx^2 - y^2 - Pz^2$.

Jouguet (E.). — Sur les ondes de choc dans les corps solides (461-464).

L'auteur établit les formules qui régissent la propagation des ondes de choc dans les solides : elles sont analogues à celles qu'a trouvées Duhem pour les fluides visqueux.

Galbrun. — Déformation d'un ressort en hélice (464-466).

L'auteur reprend le problème qui a fait l'objet de sa Note précédente (*voir*

plus haut), mais en supposant libres les extrémités du ressort: il trouve ainsi, en particulier, que la variation de distance des extrémités est presque le double de celle de l'autre cas.

Humbert (*P.*). — Sur les fonctions hypercylindriques (490-492).

Soit $\Delta U = 0$ l'équation de Laplace à quatre variables dans laquelle on a fait le changement $x = \rho \sin\theta \sin\psi$, $y = \rho \sin\theta \cos\psi$, $z = \rho \cos\theta$, $t = t$.

On peut y satisfaire en posant $U = e^{\mu t} \cos\nu\psi V(\rho, \theta)$; la fonction V sera dite alors *hypercylindrique*. L'auteur montre que cette fonction peut s'exprimer à l'aide d'une certaine fonction G qui se déduit, dans un cas limite, de la fonction hypergéométrique à deux variables de M. Appell.

Smirnoff (*V.*). — Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre et des fonctions automorphes (510-512).

Appelons τ_1 le quotient de deux intégrales indépendantes de l'équation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0;$$

la fonction inverse $x = \varphi(\tau_1)$ sera en général multiforme, mais il y a un intérêt particulier à trouver les cas d'uniformité quand cette fonction est automorphe. L'auteur donne la solution pour l'équation à quatre points singuliers et à intégrales régulières, qui se ramène d'ailleurs à la forme type

$$\frac{d}{dx}[x(x-a)(x-1)y'] + (x+\lambda)y = 0.$$

Jouguet (*E.*). — Sur la célérité des ondes dans les solides élastiques (512-514).

En utilisant les formules de sa dernière Note (*voir* plus haut), l'auteur obtient une expression de la célérité des ondes ordinaires dans les milieux peu déformés, qui s'applique à des cas plus généraux que ceux qui avaient été étudiés auparavant par Laplace, Poincaré, Duhem et M. Roy.

Humbert (*P.*). — Les fonctions hypercylindriques dans l'espace à $(n+2)$ dimensions (537-538).

En partant de l'équation de Laplace à $(n+2)$ variables indépendantes et en opérant comme il l'a fait pour le cas de quatre variables dans sa dernière Note (*voir* plus haut), l'auteur définit une nouvelle fonction $V(\rho, \theta)$ qui a des propriétés analogues à celles du cas précédent et qui s'exprime au moyen de la fonction G déjà considérée.

Stoïlow (*S.*). — Remarques sur les ensembles de mesure nulle à plusieurs dimensions (539-541).

Soit E un ensemble de points situés dans un plan, supposé borné et de mesure

superficielle nulle; si l'on projette ces points sur un axe, on obtient un ensemble E' qui ne sera pas en général de mesure linéaire nulle.

L'auteur démontre que si les ensembles E' sont de mesure nulle pour deux directions de projection différentes, il en sera de même pour toutes les directions. Cette propriété, qui intervient dans la classification des ensembles E, peut se généraliser au cas d'un nombre quelconque de dimensions.

Soula (*J.*). — Remarques sur la recherche des points singuliers d'une fonction définie par un développement en série de Taylor (541-543).

Soient $f(x)$, $\varphi(x)$, $H(x)$, les fonctions analytiques définies respectivement par les séries de Taylor $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma b_n x^n$ et $\Sigma a_n b_n x^n$; on sait que les seuls points singuliers possibles (mais pas certains) de H sont de la forme $\alpha\beta$, α étant singulier pour f et β pour φ. Cela permet à l'auteur de distinguer, parmi les points singuliers d'une fonction $\varphi(x)$, ceux qui donnent toujours lieu, quel que soit f et α, à un point singulier pour H et qu'il nomme *principaux;* il indique un critérium pour les reconnaître et en déduit quelques applications à la recherche des points singuliers d'une fonction.

Buhl (*A.*). — Sur la formule de Stokes dans l'espace-temps (547-549).

L'auteur rappelle une formule obtenue par lui et qui généralise dans l'espace à quatre dimensions la formule de Stokes; il montre ici, comment on peut en déduire les équations de M. de Donder au sujet du champ gravifique d'Einstein et du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz; il est remarquable que l'établissement de la formule fondamentale ne repose que sur la notion d'espace géométrique, conforme au principe du calcul intégral.

Appell (*P.*). — Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie des fonctions hypergéométriques (557-560).

L'auteur indique de remarquables propriétés des intégrales de l'équation

$$(x - x^2)r - 2xys + (y - y^2)t + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p \\ + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q - \alpha\delta z = 0.$$

En particulier elle donne les fonctions z qui annulent la variation d'une certaine intégrale double; cela permet de lui appliquer les résultats obtenus par M. E. Picard et de la ramener à la forme $r + t + f(x, y)z = 0$.

Gevrey (*M.*). — Sur la détermination des fonctions de Green (610-612).

En se bornant aux équations du second ordre du type elliptique, à n variables indépendantes, l'auteur montre que la construction de la fonction de Green pour le problème de Dirichlet peut être ramenée à dépendre uniquement de la

résolution d'une équation de Fredholm du type classique; la méthode est valable pour des contours ayant des points singuliers coniques.

Varopoulos (*Th.*). — Sur quelques théorèmes de M. Rémoundos (613-614).

L'auteur indique sans démonstration, au sujet de la croissance des fonctions entières, des inégalités plus précises que celles qu'a données M. Rémoundos (t. CLXX, 170, 1920, p. 829).

Soula (*J.*). — Généralisation d'un théorème de M. Leau relatif à la recherche des points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor (614-616).

Soit $\varphi(t) = \Sigma a_n t^n$ une fonction qui n'admet que $t = 1$ comme singularité à distance finie; on ne considère qu'une branche de cette fonction et l'on suppose qu'il existe $0 < k < 1$ tel que $(1-t)^k \varphi(t)$ reste borné en module au voisinage de $t = 1$. M. Leau a démontré que si $g(u)$ est une fonction entière, la fonction $\Sigma g(a_n) t^n$ n'a que le point singulier 1 à distance finie; l'auteur démontre que ce résultat subsiste si $g(u)$ est holomorphe pour $u = 0$ et

$$u = a_n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Bilimovitch (*An.*). — Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un corps solide (616-618).

L'auteur établit les équations générales du mouvement d'un solide, rapporté à des axes quelconques, en utilisant les notations vectorielles; elles se simplifient quand on prend des axes en liaison avec les circonstances du mouvement.

Vâlcovici (*V.*). — Sur les forces hydrodynamiques dans des mouvements différant entre eux par une rotation uniforme de tout l'espace (619-621).

L'auteur démontre que le système des forces exercées sur un solide Σ, par un fluide incompressible qui tourne uniformément autour d'un axe fixe, est équivalent au système des forces exercées par le fluide en repos sur le solide tournant dans les mêmes conditions mais en sens inverse, auquel il faut adjoindre le système des forces centrifuges de la masse du fluide déplacé par Σ dans le même mouvement de rotation.

Châtelet (*A.*). — Énumération et constitution des corps abéliens quelconques (658-661).

L'auteur a constaté que la classification et la constitution des corps abéliens s'obtiennent plus naturellement par la considération des facteurs du discriminant que par celle du degré; il indique alors un procédé de *composition* des

corps et démontre que tout corps abélien résulte de la composition de corps simples, dont les discriminants sont des puissances de nombres premiers différents; il donne quelques propriétés de ces corps simples et étudie la décomposition d'un nombre premier dans un corps abélien.

Antoine (*L.*). — Sur la possibilité d'étendre l'homéomorphie de deux figures à leur voisinage (661-664).

Soient F et f deux figures homéomorphes dans des espaces E et e ayant n dimensions; peut-on déterminer deux figures F_1, f_1, homéomorphes, telles que F et f se correspondent dans leur homéomorphie, chaque point de F ou f étant centre d'une hypersphère à $(n-1)$ dimensions, de rayon non nul, dont tout l'intérieur appartienne à F_1 ou f_1? L'auteur montre sur de nombreux exemples que cela n'est pas toujours possible et il en tire d'intéressantes propriétés des ensembles fermés, discontinus et bornés.

Andrade (*J.*). — Les frottements et l'isochronisme (664).

Soit un mouvement pendulaire simple, troublé par une résistance proportionnelle à la valeur absolue de l'écart au point mort : les semi-amplitudes décroissent alors en progression géométrique et les oscillations sont rigoureusement isochrones.

Appell (*P.*). — Sur les oscillations ellipsoïdales d'une sphère liquide (761-766).

Soit une sphère liquide homogène, immobile, soumise à l'attraction newtonienne de ses particules et à une pression constante sur sa surface; l'auteur étudie les oscillations infiniment petites du liquide pour lesquelles la surface libre reste ellipsoïdale; sa méthode, qui diffère de celle de Poincaré, s'applique de même à l'étude des oscillations ellipsoïdales autour d'un ellipsoïde d'équilibre relatif de Mac Laurin ou de Jacobi.

Birkeland (*R.*). — Résolution de l'équation algébrique trinome par des fonctions hypergéométriques supérieures (778-781).

L'auteur donne les expressions explicites des racines de l'équation $z^n = gz + \xi$, au moyen des fonctions hypergéométriques supérieures, en utilisant la théorie de ces fonctions qu'a donnée M. Goursat.

Zervos. — Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre (781-783).

L'auteur étudie les cas où la transformation

$$p' = f(x, y, z, p, q) + a(x, y, p, q)\, z',$$
$$q' = \varphi(x, y, z, p, q) + b(x, y, p, q)\, z'$$

conduit à une équation ne contenant pas z'.

Camichel (*C.*), *Eydoux* (*D.*) *et Foch* (*A.*). — Sur la transmission de l'énergie par les vibrations de liquides dans les conduites (783-786).

La méthode d'Alliévi, pour le calcul des coups de bélier, permet l'étude de la transmission de l'énergie au moyen d'ondes vibratoires envoyées dans une conduite pleine par un piston animé d'un mouvement alternatif; les auteurs établissent les calculs donnant la puissance moyenne transmise, suivant les dispositifs que l'on peut adopter.

Buhl (*A.*). — Sur les symétries du champ gravifique et l'extension lorentzienne du principe d'Hamilton (786-788).

L'auteur ajoute quelques résultats à ceux de sa Note précédente (*voir* plus haut); en particulier il obtient une forme L, généralisant la forme quadratique qui permet, en Mécanique classique, de passer du principe d'Hamilton aux équations canoniques : cette forme L conduit précisément à l'extension qu'a donnée Lorentz du principe d'Hamilton.

Jouguet (*E.*). — Sur la variation d'entropie dans les ondes de choc des solides élastiques (789-791).

En utilisant les équations données dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut), l'auteur étudie la variation d'entropie dans le cas des petites discontinuités de propagation; il démontre ainsi que dans ce cas la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot est très voisine de la loi adiabatique ordinaire.

Sparre (*M. de*). — Sur le coup de bélier dans les conduites forcées alimentant des turbines à forte réaction (833-835).

La formule employée habituellement pour le calcul du coup de bélier maximum peut donner une valeur de 60 pour 100 trop faible quand il s'agit d'une turbine à forte réaction; l'auteur établit la correction très importante qu'il faut apporter dans ce cas.

Gevrey (*M.*). — Sur la résolution des problèmes aux limites relatifs aux équations du second ordre des types elliptique et parabolique (839-842).

La méthode indiquée par l'auteur dans sa Note précédente (*voir* plus haut) permet d'obtenir la fonction de Green, pour le problème de Dirichlet *intérieur*, au moyen d'une équation intégrale, dans le cas des équations linéaires du type elliptique; l'auteur l'étend au cas de divers problèmes aux limites, en particulier au cas du problème *extérieur;* il traite également le cas de l'équation parabolique à deux variables.

Gambier (*B.*). — Couples de deux surfaces minima se correspondant comme focales d'une congruence rectiligne, avec conservation des lignes asymptotiques et des lignes de longueur nulle (842-845).

L'auteur donne la solution la plus générale de ce problème, qui est constituée par le lieu des milieux de MM′ et M_1M_1' lorsque les points M, M′, M_1, M_1' décrivent respectivement quatre courbes minima particulières; il en étudie quelques propriétés : par exemple, la réalité simultanée ou non des points homologues sur les deux surfaces; il étudie enfin une solution composée de deux surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Risser. — Sur une application de l'équation de Volterra au problème de la répartition par âge dans les milieux à effectif constant (845-847).

Soient $\varphi(x)$ la loi caractéristique des entrées à l'âge x, $l(X)$ la loi de survie à l'âge X; on a à résoudre l'équation

$$l(X) + \int_0^X \varphi(x)\, l(X - x)\, dx = 1.$$

En remplaçant $l(X)$ par une série d'exponentielles uniformément convergente dans l'intervalle considéré, on est ramené à une équation du type de Volterra.

Lecornu (*L.*). — Sur le mouvement permanent des liquides (881-885).

L'auteur montre que, si les forces extérieures dépendent d'un potentiel, les trajectoires moléculaires vérifient une condition spéciale, en sorte qu'un ensemble quelconque de courbes ne peut en général constituer un système possible de trajectoires. Il donne cette condition sous forme analytique et sous forme géométrique, et il étudie quelques ensembles de courbes particulièrement remarquables.

Jouguet (*E.*). — Application du principe de Carnot-Clausius aux ondes de choc des solides élastiques (904-907).

Ce principe permet d'ajouter quelques conditions d'inégalité aux équations données par l'auteur dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut); en négligeant certains termes petits, on peut ainsi obtenir des résultats sur les célérités relatives de l'onde de choc et des diverses ondes d'accélération.

Varopoulos (*Th.*). — Sur les fonctions algébroïdes et les fonctions croissantes (991-992).

Soit $u = \varphi(z)$ une fonction à ν branches, définie par $f(u, z) = 0$, f dési-

gnant un polynome de degré ν en u dont les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes de z; on appellera *valeur exceptionnelle* de $\varphi(z)$ tout nombre a tel que $\varphi(z) = a$ admette un nombre fini de racines; l'auteur démontre que, sauf exceptions, le nombre des valeurs exceptionnelles ne dépasse pas $\nu + 1$. Il ajoute quelques autres résultats qui complètent ceux de M. Rémoundos sur ce sujet et sur la croissance des fonctions.

Birkeland (*R.*). — Résolution de l'équation générale du cinquième degré (1047-1049).

Un théorème de Yerrard permet, en résolvant une équation du troisième degré, de ramener l'équation générale du cinquième degré à la forme $x^5 = gx + \beta$, qui appartient à la forme trinome résolue par l'auteur dans sa Note précédente (*voir* plus haut); l'auteur donne la solution explicite, au moyen de fonctions hypergéométriques supérieures, et les formules obtenues permettent d'étudier les points critiques des racines et les substitutions qu'elles subissent quand on fait varier β et g.

Gambier (*B.*). — Application imaginaire de deux surfaces réelles ou imaginaires. Systèmes cycliques ou systèmes triples orthogonaux réels correspondants (1049-1052).

L'auteur montre que, comme il arrive pour beaucoup de problèmes éloignés en apparence de celui de la déformation des surfaces, la détermination des systèmes cycliques réels se ramène à celle de deux surfaces applicables S et S', les points réels de S ayant pour homologues des points imaginaires de S'. Les lignes de courbure réelles des trajectoires orthogonales des cercles forment avec ceux-ci un système triple orthogonal réel; l'auteur en étudie diverses propriétés et traite l'exemple qui dérive de la développée de la surface d'Enneper, laquelle admet une infinité d'auto-applications.

Dumas (*G.*) *et Chuard* (*J.*). — Sur les homologies de Poincaré (1113-1116).

Ces homologies interviennent dans beaucoup de questions d'*Analysis situs;* les auteurs se proposent d'en expliquer la nature et les diverses combinaisons, qui sont analogues à celles des équations.

Humbert (*P.*). — L'équation de Laplace en coordonnées hypertoroïdales (1116-1119).

L'auteur fait le changement de variables suivant :

$$Dx = u \operatorname{sh}\sigma, \qquad Dy = v \operatorname{sh}\sigma, \qquad Dz = \sqrt{1 - u^2 - v^2}\, sh\,\sigma, \qquad Dt = -\sin\theta$$

(avec $D = \operatorname{ch}\sigma - \operatorname{ch}\theta$), dans lequel les surfaces $\sigma =$ const. sont des hypertores; l'équation de Laplace à quatre variables indépendantes x, y, z, t donne alors une nouvelle équation dont certaines solutions particulières généralisent les polynomes $\mathcal{V}_{m,n}(x, y)$ d'Hermite et de Didon.

Axel Egnell. — Congruence de droites dont la surface moyenne est une surface donnée (1119-1121).

En utilisant les notations vectorielles, l'auteur montre que le problème dépend de l'intégration d'une équation de Riccati; les propriétés connues de ces intégrales fournissent alors divers résultats intéressants pour ce problème.

Fontviolant (B. de). — Calcul des ponts circulaires à une seule travée, comportant deux contreventements et des entretoisements transversaux sur leurs appuis seulement (1122-1124).

Dans des Notes antérieures (t. CLXX, 1920, p. 376 et 796), l'auteur a établi le calcul des efforts pour un pont à entretoisements transversaux dans toute la longueur; il montre qu'on peut supprimer ces derniers à condition de munir le pont de deux contreventements; les résultats du calcul se résument en deux théorèmes donnant le moment composé et les efforts tranchants.

Guichard (C.). — Sur les réseaux qui comprennent une famille de géodésiques et tels que leur polaire réciproque par rapport à un complexe linéaire soit un réseau O (1187-1190).

La solution de ce problème se ramène à celle de divers autres, traités par l'auteur dans des Notes antérieures, et à la recherche de trois solutions d'une même équation de Moutard, telles que la somme de leurs carrés ne dépende que d'une seule des deux variables.

Buhl (A.). — Sur les intégrales doubles en lesquelles les pseudo-lignes d'infini sont lignes de zéros (1198-1200).

Si l'on pose

$$X = \frac{\Phi(x, y)}{x - \alpha(y)}, \qquad Y = Y(y),$$

l'identité

$$\int_C X\,dy = \int\int_S dX\,dY$$

prend la forme

$$\int_C X\,dY = \int\int_S \frac{\Delta\,dx\,dy}{(x-\alpha)^2},$$

et l'auteur a établi antérieurement les conditions pour que Δ soit divisible par $(x-\alpha)^2$; il étudie ici le cas où Δ contient $(x-\alpha)^3$ en facteur, de sorte qu'une ligne d'infini située sous l'intégrale simple correspond au second membre à une ligne de zéros sous l'intégrale double. Ce cas est très important pour le dénombrement des intégrales doubles de seconde espèce attachées à une surface algébrique.

Varopoulos (*Th.*). — Sur une classe de fonctions à un nombre infini de branches (1200-1202).

Considérons les fonctions $u(z)$ définies par

$$A_0(z) + A_1(z)u + \ldots + A_{n-1}(z)u^{n-1} + f(z, u) = 0,$$
$$f(z, u) = \varphi_1(u)a_1(z) + \ldots + \varphi_\mu(u)a_\mu(z),$$

où les $\varphi_i(u)$ sont des fonctions uniformes et les $a_i(z)$ des fonctions entières d'ordre inférieur au plus grand ordre $e^{M(r)}$ des fonctions entières $A_i(z)$; l'auteur étend à ces fonctions les résultats de sa Note précédente (*voir* plus haut) relativement aux valeurs exceptionnelles de ces fonctions.

Takagi. — Sur les corps résolubles algébriquement (1202-1205).

L'auteur généralise de la manière suivante un théorème de Dedekind : soient k un corps de degré premier résoluble algébriquement, K_0 le corps cyclique correspondant; si l'on définit les classes d'idéaux de K_0 suivant le module F, le groupe de ces classes contient un sous-groupe l tel que, parmi les nombres premiers rationnels ne divisant pas le discriminant de k et se décomposant en facteurs premiers du premier degré dans K_0, ceux qui se décomposent en facteurs premiers du premier degré dans k, et ceux-là seuls, sont égaux à la norme d'un idéal de K_0 faisant partie de ce sous-groupe.

Dickson (*L.-E.*). — Les polynomes égaux à des déterminants (1360-1362).

L'auteur démontre que les seuls polynomes homogènes et généraux qui soient égaux à des déterminants, dont les éléments sont des fonctions linéaires, sont : les formes à deux ou trois variables, les formes quadratiques et cubiques à quatre variables.

Bays (*S.*). — Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner (1363-1365).

Les systèmes de triples de Steiner sont les ensembles de combinaisons trois à trois de N éléments, contenant une fois et une seule chaque couple de ces éléments : un tel système est *cyclique* s'il comprend $N = 6n + 1$ éléments dont les nN triples sont répartis en n séries cycliques de la forme $a + x$, $b + x$, $c + x$, $(x = 1, \ldots, N)$. L'auteur indique un moyen pour former les différents systèmes cycliques correspondant à toute valeur de n.

Giraud (*G.*). — Réponse à une Note de M. Fubini sur les fonctions automorphes (1365-1366).

L'auteur montre par un exemple la nécessité de la restriction qu'il a apportée à un énoncé de M. Fubini, au sujet des groupes de collinéations réelles conservant les formes quadratiques du type $x_1^2 + x_2^2 - (x_3^2 + \ldots + x_n^2)$.

Humbert (*P.*). — Sur les fonctions hypertoroïdales et leur lien avec les fonctions hypersphériques (1366-1368).

Un changement de variables analogue à celui de la Note précédente du même auteur (*voir* plus haut), dans la même équation de Laplace, conduit à une fonction qui généralise le polynome $V_{m,n}(x, y)$ d'Hermite; ces fonctions hypertoroïdales sont aux fonctions hypersphériques exactement ce que les fonctions toroïdales sont aux fonctions sphériques.

Varopoulos (*Th.*). — Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles (1368-1369).

L'auteur étend les résultats donnés dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut) aux intégrales de l'équation

$$A_0(z) + A_1(z)u + \ldots + A_{\mu-1}(z)u^{\mu-1} + u^{\mu} + z\Phi(u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0,$$

où les $A_i(z)$ sont des fonctions entières et Φ un polynome.

Birkeland (*R.*). — Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables (1370-1372).

Appelons avec l'auteur « fonction hypergéométrique de p variables » la fonction $\Sigma K_{n_1, n_2, \ldots n_p} z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p}$, dans laquelle les rapports de deux coefficients K quelconques sont des fonctions rationnelles de leurs indices; l'auteur démontre alors que les n racines d'une équation algébrique générale de degré n peuvent s'exprimer par une somme de fonctions hypergéométriques de $n-1$ variables, qu'il indique explicitement.

Fontviolant (*B. de*). — Calcul des ponts circulaires, à travées continues, comportant deux contreventements et des entretoisements transversaux sur leurs appuis seulement (1372-1374).

L'auteur établit le calcul des ponts du même type que celui dont il s'agit dans sa Note précédente (*voir* plus haut), mais comportant des travées continues au lieu d'une travée unique.

Bloch (*L.*). — Remarque sur la théorie de Lorentz comparée à celle de Mie (1379-1380).

L'auteur a remarqué que la théorie de Fokker-Lorentz utilise des équations qui impliquent contradiction; on ne peut la rendre cohérente qu'en introduisant une fonction inconnue (que les auteurs supposent nulle); mais alors cette théorie ne présente plus d'avantage sur celle de Mie-Hilbert.

E. Gau.

RENDICONTO DELLE SESSIONI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA.
Classe di Scienze fisiche.

Nuova Serie, Vol. XVI, 1911-1912 (1).

Enriques (*F.*). — [$M_2 8a$] Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali [Quelques observations sur les surfaces rationnelles réelles] (70-73).

Soit une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

représentable sur le plan par les relations

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v),$$
$$z = \chi(u, v).$$

L'ordre de connexion de la surface est l'unité augmentée du nombre des points de base du système

$$\lambda\varphi + \mu\psi + \nu\chi = 0 \tag{1}$$

et diminuée du nombre des courbes exceptionnelles fondamentales du même système.

Toutes les surfaces algébriques réelles d'ordre impair ont au moins une nappe d'ordre impair unilatérale. Une surface rationnelle réelle d'ordre pair est unilatérale si la somme des ordres des courbes exceptionnelles fondamentales de (1) est paire.

Pincherle (*S.*). — [V9] Commemorazione del prof. Arzelà [Commémoration de M. le prof. Arzelà] (159-179).

Avec la liste des 48 travaux de M. Arzelà.

Vol. XVII, 1912-1913.

Enriques (*F.*). — [$L_1 8b$] Sulla teoria geometrica degli immaginari [Sur la théorie géométrique des imaginaires] (69-72).

La correspondance entre les points réels et imaginaires d'un plan et les points réels de S_4 conduit à la représentation de Standt.

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, p. 16.

Donati (*L.*). — [T 7] Diagramma per i motori sincroni e alternatori [Diagramme pour les moteurs synchrones et alternateurs] (81-90).

Vol. XVIII, 1913-1914.

Pincherle (*S.*). — [H 11] Appunti di calcolo funzionale [Notes de calcul fonctionnel] (20-22).

Rectification au Mémoire de même titre inséré au Tome VIII (6e série), 1911, des Mémoires de cette Académie, page 117.

Pincherle (*S.*). — [H 11] Alcune osservazioni sulla iterata di una funzione data [Quelques observations sur l'itérée d'une fonction donnée] (75-88).

Généralités sur l'opération

$$f_n(x) = f \cdot f \cdots f(x).$$

Donati (*L.*). — [T 7] Sulle forze ponderomotrici e le tensioni elettromagnetiche [Sur les forces motrices et les tensions électromagnétiques] (124-134).

Vol. XIX, 1914-1915.

Enriques (*F.*). — [M_2 1, ref. Q 2] Sulle intersezioni di due varietà algebriche [Sur les intersections de deux variétés algébriques] (90-92).

Une surface d'ordre m et une courbe d'ordre n ont mn points communs. La démonstration de Poncelet (*Analyse des transversales*, n° 241; *Journ. de Crelle*, t. 8, et *Traité*, 1866, t. II, p. 224) peut être généralisée et appliquée à deux variétés V_r^m, V_{n-r}^p de S_n.

Donati (*L.*). — [T 7] Sul fenomeno d'inversione nei trasformatori a corrente alternativa [Sur le phénomène d'inversion dans les transformateurs à courant alterné] (98-106).

Vol. XX, 1915-1916.

Pincherle (*S.*). — [H 11] Sopra alcuni nuclei analitici [Sur certains noyaux analytiques] (85-100).

Sur la théorie des équations intégrales dans le champ des fonctions analytiques et à noyaux de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{n+\nu,n} x^{n+\nu}}{y^{n+1}}.$$

Donati (*L.*). — [T 7] Sul comportamento magnetico ed energetico di correnti elettriche con circuiti privi di resistenza [Sur le comportement magnétique et énergétique de courants électriques à circuits dépourvus de résistance] (103-109).

Enriques (*F.*). — [M_2 8 *a*] L'intorno di una curva sopra una superficie algebrica [Sur le domaine d'une courbe sur une surface algébrique] (109-112).

Le domaine d'une courbe algébrique sur une surface algébrique peut être regardé comme une surface rationnelle avec un ordre d'approximation aussi grand que l'on veut. Applications à la théorie des singularités des surfaces.

Burgatti (*D.*). — [T 2] Il principio di Archimede nei mezzi solidi [Le principe d'Archimède dans les milieux solides] (120-124).

Corps rigide dans un milieu solide élastique. Les conclusions sur le mouvement du corps expliquent les désagrégations qui ont lieu parfois dans certains matériaux.

Vol. XXI, 1916-1917.

Donati (*L.*). — [T 7] Le correnti alternative e la legge di reciprocità [Les courants alternés et la loi de réciprocité] (55-61).

Pincherle (*S.*). — [H 11] Appunti su alcuni problemi d'iterazione [Notes sur certains problèmes d'itération] (86-97).

Enriques (*F.*). — [M_2 8 *a*] Osservazioni sulle falde di una superficie algebrica nell' intorno di un punto singolare [Observations sur les nappes d'une surface algébrique dans le domaine d'un point singulier] (102-107).

La surface, dans le domaine d'un point r-uple, est constituée par *une seule nappe* lorsque les r valeurs de la fonction algébrique $z(x, y)$ forment (par

continuation) une fonction analytique irréductible dans ce domaine. Si $z(x, y)$ est réductible, la surface se décompose en plusieurs nappes. Cas du point biplanaire. Le domaine d'un point i-uple peut être approché autant qu'on veut par une surface rationnelle à point i-uple.

Burgatti (*P.*). — [S 2 *e* α] Sopra un paradosso nella teoria del moto uniforme d'un solido immerso in un fluido perfetto [Sur un paradoxe dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide parfait] (115-119).

Étant p_0 la pression hydrostatique, il ne peut exister de mouvement de translation avec une vitesse supérieure à $\sqrt{2p_0}$.

SCIPIONE RINDI.

MEMORIE DELLA ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA.

Série VI, T. X, 1912-1913 (1).

Razzaboni (*A.*). — [O 6 *k*] Determinazione delle curve in cui si trasforma l'ellisse di gola dell' iperboloide ad una falda per deformazione continua della superficie [Détermination des courbes en lesquelles se transforme l'ellipse de gorge de l'hyperboloïde à une nappe par déformation continue de la surface] (11-15).

Équation intrinsèque des courbes transformées. Pour l'hyperboloïde de rotation on retrouve le résultat obtenu par Laguerre.

Guarducci (*F.*). — [X 6] Sopra un nuovo planimetro polare [Sur un nouveau planimètre polaire] (17-20).

Righi (*A.*). — [T 6] Nuove ricerche sulle rotazioni ionomagnetiche [Nouvelles recherches sur les rotations iono-magnétiques) (97-121).

Burgatti (*P.*). — [R 8 *c* β] Ricerche analitiche sul moto dei giroscopi in un campo potenziale [Recherches analytiques

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX$_2$, p. 36.

sur le mouvement des gyroscopes dans un champ potentiel] (155-164).

Recherche des intégrales algébriques pour des champs potentiels différents du champ de gravitation.

Série VII, T. I, 1913-1914.

Guarducci (*F.*). — [U] Determinazione delle latitudine astronomica di Modena [Détermination de la latitude astronomique de Modène] (41-43).

Razzaboni (*A.*). — [O 5 *i*] Sulle superficie nelle quali i circoli osculatori delle linee di curvatura di un sistema tagliano un piano fisso sotto angolo costante [Sur les surfaces dans lesquelles les cercles osculateurs des lignes de courbure d'un système rencontrant un plan fixe sous un angle constant] (113-135).

Enriques (*F.*). — [M_1 2] Sul teorema d'invarianza della serie canonica g_{2p-2}^{p-1} appartenente ad una curva algebrica di genere p [Sur le théorème d'invariance de la série canonique g_{2p-2}^{p-1} appartenant à une courbe algébrique de genre p] (189-193).

Burgatti (*P.*). — Sulle deformazioni continue dei corpi continui [Sur les déformations continues des corps continus] (237-244).

Tractation au moyen du calcul vectoriel.

T. II, 1914-1915.

Canevazzi (*S.*). — [T 2 *a*] Determinazione grafica dell' asse neutro nei solidi molto curvi soggetti a flessione [Détermination graphique de l'axe neutre dans les solides très courbés soumis à une flexion] (51-58, une planche).

Righi (*A.*). — [T 6] Sul moto dei ioni (ed elettroni) in un campo elettrico e magnetico e su diversi fenomeni che ne dipendono [Sur le mouvement des ions (et des électrons) dans un champ électrique et magnétique et sur divers phénomènes qui en dépendent] (153-183).

Rajna (*M.*). — [U] Passaggio di Mercurio sul disco solare a di 7 novembre 1914 osservato nella specola della R. Università di Bologna [Passage de Mercure sur le disque solaire du 7 novembre 1914, observé à l'Observatoire de l'Université royale de Bologne] (185-186).

Guarducci (*F.*). — [U 10] Sopra un caso speciale di determinazione geodetica di un punto [Sur un cas spécial de détermination géodésique d'un point] (251-255, un Tableau).

Burgatti (*P.*). — [R 5 *a*] Osservazioni sull' origine delle comete [Observations sur l'origine des comètes] (305-312).

Razzaboni (*A.*). — [O 3] Sulla trasformazione delle curve a flessione costante [Sur la transformation des courbes à flexion constante] (345-351).

T. III, 1915-1916.

Canevazzi (*S.*). — [T 2] Metodo abbreviato di calcolo per le travi quadrangolate ad asse rettilineo e ad altezza costante o variabile [Méthode abrégée de calcul pour les poutres quadrangulées à axe rectiligne et à hauteur constante ou variable] (3-22, une Planche).

Righi (*A.*). — [T 5] Sulla fase iniziale della scarica in campo magnetico [Sur la phase initiale de la décharge dans un champ magnétique] (93-112).

Guarducci (*F.*). — [U 10] Sul trasporto delle coordinate geografiche lungo archi di geodetica dell' ellissoide terrestre [Sur le transport des coordonnées géographiques sur des arcs de géodésique de l'ellipsoïde terrestre] (193-199, un Tableau).

Razzaboni (*A.*). — [O 3] Considerazioni sulla trasformazione delle curve a flessione costante a centro di curvatura ideale in

Geometria iperbolica [Considérations sur la transformation des courbes à flexion constante à centre de courbure idéal en Géométrie hyperbolique] (201-207).

T. IV, 1916-1917.

Razzaboni (*A.*). — [O 5 *i*] Sulla superficie con un sistema di linee di curvatura a flessione costante [Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont à flexion constante] (29-41).

Canevazzi (*S.*). — [T 2] Archi elastici ribassati. Metodo abbreviato di calcolo [Arcs élastiques rabaissés. Méthode abrégée de calcul] (43-51, une Planche).

Righi (*A.*). — [T 6] Sulla ionizzazione prodotta dai raggi X nel campo magnetico [Sur l'ionisation produite par les rayons X dans le champ magnétique] (53-70).

Guarducci (*F.*). — [U 10] Sui triangoli formati da tre geodetiche sull' ellissoide terrestre [Sur les triangles formés par trois géodésiques sur l'Ellipsoïde terrestre] (99-102).

Burgatti (*P.*). — [R 5 *a*] I teoremi del gradiente, della divergenza, della rotazione, sopra una superficie, e loro applicazione ai potenziali [Les théorèmes du gradient, de la divergence, de la rotation, sur une surface, et leur application aux potentiels] (103-112).

Les formules pour l'espace

$$\int_S \operatorname{grad} \varphi \, ds = -\int_\sigma \varphi \, \mathbf{n} \, ds,$$

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{u} \, ds = -\int_\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{n} \, ds,$$

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \, ds = -\int_\sigma \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} \, ds$$

peuvent s'appliquer aux aires planes. Pour les surfaces courbes limitées par un

contour, elles sont substituées par les suivantes :

$$\int_\sigma \operatorname{div}_\sigma \mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{n}\, d\sigma - \int_s \mathbf{u} \times \mathbf{v}\, ds,$$

$$\int_\sigma \operatorname{grad}_\sigma \varphi\, d\sigma = \int_\sigma \varphi \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n}\, d\sigma - \int_s \varphi \mathbf{v}\, ds,$$

$$\int_\sigma \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{u}\, d\sigma = \int_\sigma (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{n}\, d\sigma - \int_s \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\, ds.$$

SCIPIONE RINDI.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLV.

101

TABLES ALPHABÉTIQUES

DU

TOME XLV, 2e SÉRIE (LVIe DE LA COLLECTION) : 1921

DEUXIÈME PARTIE.

1° TABLE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES ANALYSÉES.

(Le nom du rédacteur de l'analyse est indiqué en italique.)

Pages.

Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 3e série, t. XXXIII, 1916 (*Georges Giraud*) 18

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. LI, 1915-1916 (*Scipione Rindi*) 52

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 169, 2e semestre 1919 (*E. Gau*) 5

— Tome 170, 1er semestre 1920 (*E. Gau*) 31

— Tome 171, 2e semestre 1920 (*E. Gau*) 77

Journal de mathématiques pures et appliquées, 6e série, t. VIII, 1912 (*R. de Montessus de Ballore*) 49

Memorie della Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. 6e série, tome X, 1912-1913 (*Scipione Rindi*) 95

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (classe della Società reale di Napoli), série III, vol. XXII à XXVI, 1916-1920 (*Joseph Pérès*) 72

Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, classe di scienze fisiche. Nuova serie. vol. XVI, 1911-1912 (*Scipione Rindi*) 92

The quarterly journal of pure and applied mathematics. Vol. XLI, 1910 (*E. Cahen*) 22

2° TABLE DES AUTEURS DONT LES NOTES OU MÉMOIRES SONT ANALYSÉES.

Albenga (G.). 54, 56, 61, 62, 69.
Amato (Vincenzo). 73, 74, 74.
Amodeo (F.). 77.
Andoyer (H.). 8, 34.
Andrade (J.). 41, 47, 85.
Andreoli (Giulio). 74, 75, 76.
Antoine (L.). 85.
Appell (P.). 83, 85.
Axel Egnell. 89.
Barnes (E. W.). 26.

Basset (A. B.). 23, 30.
Bateman (H.). 29.
Bays (S.). 90.
Bell (E. T.). 13.
Bianchi (L.). 41.
Bilimovitch (An.). 84.
Birkeland (R.). 33, 85, 88, 91.
Bloch (L.). 91.
Boccardi (G.). 57, 67.
Boggio (T.). 68.
Bompiani (E.). 15.
Borel (E.). 50.
Bottasso (M.). 55, 65.
Bouligand (G.). 13, 15, 16.
Boussinesq (J.). 6, 50.
Boutroux (P.). 12, 32, 43.
Boverio (E.). 63.
Brillouin (Léon). 18.
Brouwer (L. E. J.). 16, 40, 78.
Brunelli (P. E.). 74.
Brusotti (L.). 70.
Buhl (A.). 80, 83, 86, 89.
Burali-Forti (C.). 61, 63, 64.
Burgatti (D.). 94, 94, 95, 96, 97, 98.
Burnside (W.). 28, 28.
Burzio (F.). 61, 62, 64, 66.
Camichel (C.), Eydoux (D.) et Foch (A.). 86.
Canevazzi (S.). 96, 97, 98.
Cantelli (F.). 53.
Capetti (A.). 61.
Carleman (T.). 14, 80.
Carlson (F.). 17, 79.
Cartan (E.). 47, 77.
Catania (S.). 52.
Cerf (G.). 12, 34, 44.
Châtelet (A.). 13, 38, 84.
Chazy (J.). 11, 38, 48.
Chuard (J.) et Dumas (G.). 88.
Cicconetti (G.). 58, 67.
Cipolla (Michele). 73, 76, 76.
Colonnetti (G.). 68, 71.
Comi (T. T). 67, 69.
Delassus (Ét.). 19.
Delaunay (B.). 79.
Della Casa (L.). 58.
Del Re (A.). 68, 72.
Denjoy (Arnaud). 7, 19.
Destefanis (M.). 68.
Dickson (L. E.). 90.
Dixon (A. C.). 27, 27.
Donati (L.). 93, 93, 94, 94.
Donder (T. de) et Vanderlinden (H.). 44.
Drach (J.). 17, 45.
Duhem (P.). 49.
Dulac (H.). 15.
Dumas (G.) et Chuard (J.). 88.
Enriques (F.). 92, 92, 93, 94, 94, 96.
Escott (Edward-Brind). 26, 26.
Eydoux (D.). 86.
Foch (A.). 11, 12, 86.
Follett (C. W.). 23.
Fontviolant (Bertrand de). 34, 40, 89, 91.
Forsyth (A. R.). 25.
Fréchet (M.). 36.
Fredholm (I.). 81.
Frisone (R). 61, 64.
Fubini (G.). 55, 67, 67, 78, 78.
Galbrun. 78, 81, 81.
Gambier (B.). 36, 38, 47, 87, 88.
Garnier (R.). 7, 8.
Gerbaldi (F.). 66, 71.
Gevrey (M.). 83, 86.
Giraud (Georges). 6, 20, 20, 90.
Glaisher (J. W. L.). 25, 29, 30.
Goursat (E.). 10, 45.
Grassi (G.). 63.
Gronwall (F. H.). 21.
Gronwall (T. H.). 49.
Guarducci (F.). 95, 96, 97, 97, 98.
Guichard (C.). 36, 43, 45, 47, 89.
Guidi (C.). 59, 63, 64.
Hadamard (J.). 31, 33.
Hamy (M.). 14.
Hardy (G.-H.). 22, 28.
Hargreaves (R.). 30.
Hill (J. M.) et Wipple (F. J. W.), 26
Hondros (D.). 43.
Huber (M. T.). 35, 46.
Humbert (P.). 16, 31, 37, 40, 44, 48, 81, 82, 82, 88, 91.
Humbert (G.). 7, 7, 8, 9, 10, 33, 35, 36, 38, 79, 80, 81.
Insolera (F.). 59.
Jackson (F. H.). 27.
Jadanza (N.). 54, 57, 58, 60, 60, 65, 71.
Janet (M.). 44, 46.
Jekhowsky (B.). 42.

Jouguet (E.). 8, 78, 81, 82, 86, 87.
Jourdain (Philip E. B.). 28, 30.
Julia (G.). 39, 41, 41, 42, 45, 46.
Kampé de Fériet (J.). 37, 43.
Kœnigs (G.). 50.
Kogbetliantz (E.). 5, 7, 8, 10, 14, 16.
Kolossoff (G.). 13.
Lagneau, 64.
Lange-Nielsen (F.). 42.
Laura (E.). 67.
Lazzarino (O.). 68.
Leblanc (M.). 12.
Lecornu (L.). 87.
Lévy (P.). 9.
Maillet (E.). 42.
Maiorano (Q.). 69, 70.
Mayer (O.). 15.
Meadowcroft (L. V.). 24.
Mesnager (A.). 16, 17.
Miller (G. A.). 27, 31.
Mineur (H.). 39.
Montel (P.). 19.
Montesano (Gaetano). 73, 76.
Morales (Adele). 73.
Mori-Breda (G.). 64, 69.
Nicholson (W.). 29.
Nils Pipping, 44.
Nörlund (N. E.), 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 35, 39.
Ocagne (M. d'). 32.
Panetti (M.). 54, 59, 72.
Pascal (Ernesto), 72, 72, 74.
Pascal (Mario). 75, 75, 77, 77.
Peano (G.). 53, 60, 65, 69.
Pensa (A.). 63, 63.
Pesloüan (L. de). 32, 37.
Petot (A.). 79, 79.
Pétrovitch (M.). 13.
Picard (Emile). 18, 20, 21.
Picone (Mauro). 60, 70, 76.
Pincherle (S.). 65, 92, 93, 94.
Plancherel (M.). 17.
Plâtrier (Ch.). 6, 9.
Poli (C.). 56.
Pomey (L.). 31.
Pompeiu (D.). 34.
Rabut (Ch.). 33, 38.
Raciti (C.). 69.
Rajna (M.). 97.
Razzaboni (A.). 95, 96, 97, 97, 98.
Rémoundos (G.). 40, 48, 78.
Renaux. 37.
Ricci (C. L.). 53.
Righi (A.). 95, 96, 97, 98.
Risser. 87.
Robinson (L. B.). 11.
Rosati (C.). 57, 62.
Rosenblatt (A.). 35.
Rossi (A. G.). 54, 62, 64, 64.
Roy (L.). 51.
Sakellariou (N.). 34.
Salmon (W. H.). 23.
Sannia (Gustavo). 59, 63, 68, 69, 71, 75.
Scorza (G.). 66, 73.
Segre (C.). 71.
Sesini (O.). 71.
Sibirani (F.). 60, 68, 70.
Sierpinski (W.). 42, 77.
Smirnoff (V.). 82.
Somigliana (C.). 54, 55, 58, 65, 70.
Soula (J.). 83, 84.
Sparre (M. de). 86.
Steinthal (A. Ernest). 28.
Stoïlow (S.). 12, 14, 82.
Straneo (P.). 64.
Stuyvaert. 10.
Takagi. 90.
Tanturri (A.). 57, 61, 66, 68, 69.
Tavani (F.). 52.
Terracini (A.). 54, 55, 71.
Thiry (R.). 39, 46.
Togliatti (E. G.). 61, 61.
Torelli (Gabriele). 73.
Trapani (Emma). 74
Tricomi (Francesco). 76, 77.
Vacca (G.). 30, 54.
Vâlcovici (V.). 84.
Valiron (G.). 16, 32.
Vanderlinden (H.) et Donder (T. de). 44.
Varopoulos (Th.). 84, 87, 90, 91.
Vergerio (A.). 53.
Véronnet (A.). 8, 31, 46, 51.
Villat (H.). 35, 38, 47.
Viriglio (L.). 67.
Vitali (G.). 53.
Watson (G. N.). 22, 23, 24.
Wipple (F. J. W.) et Hill (J. M.). 26.
Wolf (J.). 11.

Young (W. H.). 24, 25, 27, 30.
Zanotti-Bianco (O.). 70.
Zavagna (I.). 70.
Zervos 85.

3e TABLE DES AUTEURS D'ANALYSES.

Cahen (E.). 22.
Gau (E.). 5, 31, 77.
Giraud (Georges). 18.
Montessus de Ballore (R. de). 49,
Pérès (Joseph). 72.
Rindi (Scipione). 52, 92, 95.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLV.

64182 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

QA
1

Bulletin des sci

V 45, 1921 1st part

March 57 - 88

June

~~July~~ 153 - 184

2nd part